Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Dr. Daniel Weiß • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl • Dipl.-Biol. Michael Kreim

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft

Übungsblatt 5

Wintersemester 2013/2014

Hausübung H9 (Funktionen) **7+3 Punkte**

(a) Betrachten Sie die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Geben Sie jeweils eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ an, die
   (i) injektiv, aber nicht surjektiv ist.
   (ii) surjektiv, aber nicht injektiv ist.
   (iii) bijektiv ist. Geben Sie hierzu auch die Umkehrabbildung an.

(b) Gegeben seien die Mengen $U, V, W \subseteq \mathbb{C}$ und die Funktionen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \to U, \quad z \mapsto iz, \\ g &: U \to V, \quad z \mapsto \bar{z}z \qquad \text{und} \\ h &: V \to W, \quad z \mapsto z^2. \end{aligned}$$

Weiter sei $\Phi : \mathbb{C} \to W$, $z \mapsto (h \circ g \circ f)(z)$ die Komposition der Funktionen f, g und h. Geben Sie U, V und W als kleinstmögliche Teilmengen von $\mathbb{C}$ an, sodass die Komposition wohldefiniert ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. Begründen Sie zudem, ob Φ injektiv oder surjektiv ist.

Hausübung H10 (Körper und Vektorräume) **5+3+2 Punkte**

(a) Sei K ein Körper. Folgern Sie für $a, b, x, y \in K$ mithilfe der Körperaxiome der Vorlesung die nachfolgenden Aussagen:
   (i) Die Gleichungen $a + x = b$ und $ay = b$, $a \neq 0$ haben die eindeutigen Lösungen $x = b - a$, sowie $y = a^{-1}b$.
   (ii) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

(b) Gegeben sei $V := \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_2 - 5x_3 = 0\}$. Zeigen Sie V ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ und finden Sie Vektoren, die den Untervektorraum V aufspannen.

(c) Wählen Sie aus den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine möglichst große Anzahl linear unabhängiger Vektoren aus, und stellen Sie die anderen als Linearkombination dieser dar.

mündliche Aufgabe M7 (Körper) **2 Punkte**

Sei K ein Körper. Folgern Sie für $a \in K$ mithilfe der Körperaxiome, dass $-a$ und a^{-1} eindeutig bestimmt sind.

mündliche Aufgabe M8 (Funktionen) **2 Punkte**

Gegeben sei die stetige Funktion

$$\begin{aligned} f &: A \to B \\ f(x) &:= -x^2 + 2 \end{aligned}$$

mit $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie
   (i) A und B so, dass $f(x)$ surjektiv ist.
   (ii) A und B so, dass $f(x)$ injektiv ist.
   (iii) Das Urbild $f^{-1}(\{-1\})$ für $A = B = \mathbb{R}$.

Gruppenübung T8 (Funktionen)

Bestimmen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktionen von

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) := 3x - 2.$
(b) $f_2 : [1, 3] \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) := 3x - 2.$
(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) := 2x^2 + 1.$
(d) $f_4 : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f_4(x) := 2x^2 + 1.$

Gruppenübung T9 (Funktionen)

(a) Betrachten Sie die folgenden Mengen

$$\begin{aligned} A &:= \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ B &:= \{\theta, \alpha, \varepsilon, \rho, \tau, \zeta, \upsilon, \pi\}. \end{aligned}$$

Überlegen Sie sich mögliche Abbildungen zwischen A und B, die
   (i) injektiv, aber nicht surjektiv sind.
   (ii) surjektiv, aber nicht injektiv sind.
   (iii) bijektiv sind.

(b) Welche injektiven, surjektiven und bijektiven Funktionen kennen Sie aus der Schule?

(c) Was können Sie über die Abbildung

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

sagen?

Gruppenübung T10 (Rechnen mit Vektoren)

(a) Die Transposition v^T eines Spaltenvektors

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

ist der Zeilenvektor

$$v^T = \left(v_1, v_2, v_3\right).$$

Berechnen Sie, wenn möglich, folgende Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad (1,2)^T + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}(1,2)^T + \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen sie $\nu \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{1}{2}(4,6)^T + \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 25. November 2013, 11:00 Uhr** in den mit "'Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft"' gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie Ihre Lösungen direkt vor der Übung ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer.
Webseite: `http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/math1infowirt2013w/`.
Beachten Sie: Eine Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn der Lösungsweg vollständig mit angegeben ist.