Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Dr. Daniel Weiß • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl • Dipl.-Biol. Michael Kreim

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft

Übungsblatt 6

Wintersemester 2013/2014

Hausübung H11 (Vektorräume) **6+4 Punkte**

(a) Sei V ein Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Für $j = 1, \ldots, n$ definiere

$$w_j = \sum_{k=1}^{j} v_k.$$

Zeigen Sie: $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $w_1, \ldots, w_n$ sind linear unabhängig.

(b) Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(i) Sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig?

(ii) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $U = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

(iii) Ergänzen Sie die Basis von U zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Hausübung H12 (Gruppen) **5+5 Punkte**

(a) Es sei $M = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ und $S = \{f_1, f_2, f_3\}$, wobei die Abbildungen $f_i \colon M \to M$, $i = 1, 2, 3$, durch

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad f_3(x) = \frac{1}{1-x}$$

für $x \in M$ definiert sind. Zeigen Sie, dass $(S, \circ)$ mit der Komposition $\circ$ als Verknüpfung eine abelsche Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, die Menge $\{a, b, c\}$ zusammen mit der Verknüpfung $\oplus$ gegeben über die Verknüpfungstafel

$\oplus$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

ist eine kommutative Gruppe.

mündliche Aufgabe M9 (Vektorräume) **2 Punkte**

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig?

(b) Bestimmen Sie Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2\, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, so dass

$$x = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k v_k$$

gilt.

mündliche Aufgabe M10 (Gruppen) **2 Punkte**

Sei $G = (G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Für $a, b, c \in G$ folgt aus $ac = bc$ stets $a = b$, und aus $ca = cb$ folgt ebenfalls $a = b$ (Kürzungsregel).

(b) Zu je zwei Elementen $a, b \in G$ gibt es genau ein $x \in G$ mit $ax = b$, nämlich $x = a^{-1}b$, und genau ein $y \in G$ mit $ya = b$, nämlich $y = ba^{-1}$.

Gruppenübung T11 (Untervektorräume)

Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind.

(a) $W_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 = y\}$ von $\mathbb{R}^2$.

(b) $W_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_4 = 2x_2\}$ von $\mathbb{R}^4$.

(c) $W_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 = 0\}$ von $\mathbb{R}^4$.

(d) $W_4 := [0, 1] \times \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}^2$.

(e) $W_5 := \{0\} \times \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}^2$.

Gruppenübung T12 (Vektorräume)

Überprüfen Sie, ob die folgende Menge ein Vektorraum ist.

$$W := \left\{ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_k \in \mathbb{R} \right\},$$

also die Menge aller Polynome, deren Grad – d. h. größter auftretender Exponent – maximal n ist. Hierbei ist n eine feste natürliche Zahl. Finden Sie eine Basis zu W und zeigen Sie auch, dass es sich um eine Basis von W handelt.

Gruppenübung T13 (Basis)

Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha + 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gruppenübung T14 (Gruppen)

Welche der folgenden Mengen sind bezüglich der Addition Gruppen? Beweisen Sie Ihre Behauptung:

(a) $\mathbb{N}$ (b) $\mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $\mathbb{R}$

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 2. Dezember 2013, 11:00 Uhr** in den mit "'Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft"' gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie Ihre Lösungen direkt vor der Übung ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer.

Webseite: `http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/math1infowirt2013w/`.

Beachten Sie: Eine Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn der Lösungsweg vollständig mit angegeben ist.