Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Dr. Daniel Weiß • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl • Dipl.-Biol. Michael Kreim

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft

Übungsblatt 8

Wintersemester 2013/2014

Hausübung H15 (Lineare Abbildungen und direkte Summen) **5+5 Punkte**

(a) Sei V ein Vektorraum und seien L_1, $L_2 : V \to V$ lineare Abbildungen mit den Eigenschaften:

i) $L_1 \circ L_1 = L_1, \quad L_2 \circ L_2 = L_2.$

ii) $L_1 + L_2 = id.$

iii) $L_1 \circ L_2 = 0 = L_2 \circ L_1.$

Zeigen Sie: $V = \text{Bild}(L_1) \oplus \text{Bild}(L_2)$.

(b) Sei V ein Vektorraum und seien n Untervektorräume $U_k \subset V$ für $k = 1, \ldots, n$ gegeben. Wir verallgemeinern nun das bereits aus der Vorlesung bekannte Konzept der direkten Summe von zwei auf n Untervektorräume. Wir nennen V die direkte Summe aus den Untervektorräumen U_k, wenn die beiden Bedingungen

1) $V = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$,

2) von Null verschiedene Vektoren $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \ldots, u_n \in U_n$ sind linear unabhängig

erfüllt sind. In diesem Fall schreiben wir $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$.

(i) Sei für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ eine Basis B_k von $U_k \subset V$ gegeben und sei $\mathcal{B} := B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$. Zeigen Sie die Äquivalenz:

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ ist Basis von } V.$$

(ii) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass 2) für $n > 2$ nicht durch

$$U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n = \{0\}$$

ersetzt werden kann.

Hausübung H16 (Lineare Abbildungen und direkte Summen) **6+4 Punkte**

(a) Gegeben sei eine lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -5x_2 - 5x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Bild}(L)$.

(ii) Geben Sie eine Zerlegung

$$\mathbb{R}^3 = \text{Kern}(L) \oplus U \subseteq \mathbb{R}^3$$

an, indem Sie geeignete Basen bestimmen. Begründen Sie zusätzlich, warum diese Zerlegung nicht eindeutig ist.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

mündliche Aufgabe M13 (Lineare Abbildungen) **2 Punkte**

Sei V ein Vektorraum und $L : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie

$$\text{Kern}(L) = \{0\} \Leftrightarrow L \text{ ist bijektiv.}$$

mündliche Aufgabe M14 (Direkte Summe) **2 Punkte**

Sei V ein Vektorraum und $U_1, \ldots, U_n \subset V$. Zeigen Sie

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \text{span}(U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n).$$

Gruppenübung T17 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

(a) Zeigen Sie, dass $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist und bestimmen Sie den dazugehörigen Eigenwert.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Gruppenübung T18 (Bild und Kern)

Gegeben sei eine lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + 6x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von Bild(L) und Kern(L).

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 16. Dezember 2013, 11:00 Uhr** in den mit "'Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft"' gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie Ihre Lösungen direkt vor der Übung ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer.
Webseite: `http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/math1infowirt2013w/`.
Beachten Sie: Eine Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn der Lösungsweg vollständig mit angegeben ist.