Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Dr. Daniel Weiß • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl • Dipl.-Biol. Michael Kreim

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft

Übungsblatt 9

Wintersemester 2013/2014

Hausübung H18 (Inverse und Eigenräume) **5+5 Punkte**

(a) Gegeben seien die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2 & 1+i \\ 0 & 1+3i & 1+4i \\ 4+i & 6+2i & 2+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Welche der Matrizen sind invertierbar? Berechnen Sie, falls möglich, die Inverse.

(b) Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -4 & 7 & -2 \\ -8 & 10 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(i) A hat die Eigenwerte -1 und 2. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3 = \mathsf{Eig}(A;-1) \oplus \mathsf{Eig}(A;2)$ gilt.

Hausübung H19 (Lineare Gleichungssysteme) **5+5 Punkte**

(a) Geben Sie jeweils ein Beispiel eines linearen reellen Gleichungssystems von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten folgenden Typs an:

(i) Die Lösungsmenge sei leer.

(ii) Die Lösungsmenge bestehe aus genau einem Punkt des $\mathbb{R}^3$.

(iii) Die Lösungsmenge sei eine Gerade im $\mathbb{R}^3$.

(iv) Die Lösungsmenge sei eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

(v) Die Lösungsmenge sei der ganze $\mathbb{R}^3$.

(b) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7$ die Ziffern Ihrer Matrikelnummer. Verwenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{pmatrix}.$$

mündliche Aufgabe M15 (Lineare Gleichungssysteme) **2 Punkte**

Stellen Sie die elementaren Zeilenoperationen des Gauß Algorithmus

(a) Tauschen von Zeilen,

(b) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen,

(c) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null

als Matrizen, für ein 2×2 System da. Verwenden Sie diese Matrizen um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 2 \\ -x + 6y &= -1 \end{aligned}$$

zu lösen.

mündliche Aufgabe M16 (Lineare Gleichungssysteme) **2 Punkte**

Seien x_1 und x_2 spezielle Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Zeigen Sie, dass die beiden affinen Unterräume

$$W_1 := x_1 + \mathsf{Kern}(A) \quad \text{und} \quad W_2 := x_2 + \mathsf{Kern}(A)$$

identisch sind.

Gruppenübung T19 (Lineare Gleichungssysteme)

(a) Verwenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -22 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 24 \end{array}$$

(b) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 3ax_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ ax_1 & - & 2x_2 & - & ax_3 & = & 0 \\ ax_1 & + & ax_2 & - & x_3 & = & 1 \\ ax_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

mit dem reellen Parameter a. Bestimmen Sie alle Werte a, für die das LGS lösbar ist, und geben Sie jeweils die Lösungsmenge an. Benutzen Sie hierzu den Gauß-Algorithmus.

Gruppenübung T20 (Lineare Gleichungssysteme)

(a) Berechnen Sie die Inverse der beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3+i & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 23. Dezember 2013, 11:00 Uhr** in den mit "'Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft"' gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie Ihre Lösungen direkt vor der Übung ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer.
Webseite: `http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/math1infowirt2013w/`.
Beachten Sie: Eine Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn der Lösungsweg vollständig mit angegeben ist.