Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Dr. Daniel Weiß • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl • Dipl.-Biol. Michael Kreim

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft

Übungsblatt 10

Wintersemester 2013/2014

Hausübung H20 (Determinante) **6+4 Punkte**

Gegeben sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$.

(b) Bestimmen Sie $\det(\frac{1}{5}A^5)$ und $\det\left((A^T)^{-1}A^4A^T(A^{-1})^2\right)$.
(Dabei ist $A^k := \prod_{j=1}^k A$, das k-fache Produkt der Matrix mit sich selbst.)

Hausübung H21 (Determinante) **10 Punkte**

Für $n \geq 1$ sei die Matrix $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$(a_n)_{k,l} = \begin{cases} 1 & k = l \\ -l & k = l+1 \\ k & k = l-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.
Bemerkung: Die Dimension der Matrizen A_n wird mit zunehmendem n größer.
Zeigen Sie

$$\det(A_1) = 1,\ \det(A_2) = 2,\ \det(A_3) = 6,\ \det(A_4) = 24$$

und beweisen Sie, dass für $n \geq 3$

$$\det(A_n) = \det(A_{n-1}) + (n-1)^2 \det(A_{n-2})$$

gilt.

mündliche Aufgabe M17 (Determinante) **2 Punkte**

Sei $L \in M(n\times n, \mathbb{K})$ eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix. Zeigen Sie

$$\det L = \prod_{i=1}^n l_{ii}.$$

mündliche Aufgabe M18 (Determinante) **2 Punkte**

Seien $A, B \in M(n\times n, \mathbb{K})$ invertierbare Matrizen. Zeigen Sie

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Bonusaufgabe B1 (LR-Zerlegung) **10 Punkte**

Die Bonusaufgabe ist eine dritte schriftliche Aufgabe, mit der Sie bis zu 10 zusätzliche Punkte erhalten können.
Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 8 & 7 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Berechnen Sie eine Permutationsmatrix P, eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, um eine Zerlegung der Matrix A in der Form $PA = LR$ zu erhalten.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2014 !

Gruppenübung T21 (Determinante)

(a) Zeigen Sie, ohne den Determinantenproduktsatz zu verwenden, die folgenden Aussagen:

(i) Ist eine der quadratischen Matrizen A oder B nicht invertierbar, dann gilt

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(BA).$$

(ii) Ist $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ mit $d_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, n$ eine Diagonalmatrix, dann gilt

$$\det(AD) = \det(A) \cdot \det(D) = \det(DA).$$

(b) Für eine beliebige Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $P \neq E_n$ existiert eine Zerlegung

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_k,$$

wobei P_j für $j = 1, \ldots, k$ Permutationsmatrizen sind, die nur zwei Zeilen vertauschen.
Hinweis: Führen Sie eine vollständige Induktion über die Matrixdimension $n \geq 2$ durch. Machen Sie hierbei eine Fallunterscheidung zwischen $Pe_1 = e_1$ und $Pe_1 \neq e_1$.

Gruppenübung T22 (Determinante)

(a) Berechne Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

(ii) $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Entscheiden Sie selbstständig, welche der Ihnen bekannten Methoden sich für die jeweilige Matrix am besten eignet.

(b) Was sagen die berechneten Determinaten über die folgenden Eigenschaften der Matrizen aus:

(i) lineare Unabhängigkeit der Spaltenvektoren,

(ii) Rang der Matrix,

(iii) Kern der Matrix,

(iv) Invertierbarkeit der Matrix.

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 13. Januar 2014, 11:00 Uhr** in den mit "'Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft"' gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie Ihre Lösungen direkt vor der Übung ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer.
Webseite: `http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/math1infowirt2013w/`.
Beachten Sie: Eine Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn der Lösungsweg vollständig mit angegeben ist.