Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Dr. Daniel Weiß • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl • Dipl.-Biol. Michael Kreim

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft

Übungsblatt 11

Wintersemester 2013/2014

Hausübung H22 (Orthonormalbasis) **10 Punkte**

Gegeben sei

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U bezüglich des *Standardskalarprodukts*.

Hausübung H23 (Norm) **5+3+2 Punkte**

(a) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für die *Standardnorm* und die *Maximumsnorm* der Zusammenhang

$$\|x\|_{\max} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_{\max}$$

gilt.

(b) (i) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine durch das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ induzierte Norm. Beweisen Sie, dass für $a, b \in V$ die Gleichung

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right)$$

gilt.

(ii) Warum heißt diese Gleichung *Parallelogrammgleichung*? Interpretieren Sie die Gleichung elementargeometrisch mit Hilfe einer Skizze.

mündliche Aufgabe M19 (Skalarprodukt) **2 Punkte**

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und seien $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ paarweise orthonormale Vektoren. Zeigen Sie, für jeden Vektor $v \in V$ ist

$$w = v - \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i$$

orthogonal zu jedem u_i.

mündliche Aufgabe M20 (Norm) **2 Punkte**

Wir definieren für $p \in M := \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \max\}$ die Funktion $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für} \quad p \in M \setminus \{\max\}, \\ \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| & \text{für} \quad p = \max\,. \end{cases}$$

Skizzieren Sie für $n = 2$ und $p \in M$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p = 1\}$ und begründen Sie, warum $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ keine Norm in $\mathbb{R}^2$ ist.

Gruppenübung T23 (Norm und Skalarprodukt)

(a) Die sogenannte *Betragssummennorm* für Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\|v\|_1 := \sum_{k=0}^{n} |v_k|\,.$$

Prüfen Sie dafür die Normeigenschaften.

(b) Auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist das Standardskalarprodukt definiert durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Prüfen Sie, ob es sich hierbei wirklich um ein Skalarprodukt handelt.

Gruppenübung T24 (Orthonormalsystem)

Orthonormalisieren Sie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 20. Januar 2014, 11:00 Uhr** in den mit "'Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft"' gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie Ihre Lösungen direkt vor der Übung ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer.
Webseite: `http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/math1infowirt2013w/`.
Beachten Sie: Eine Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn der Lösungsweg vollständig mit angegeben ist.