Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Dr. Daniel Weiß • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl • Dipl.-Biol. Michael Kreim

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft

Übungsblatt 12

Wintersemester 2013/2014

Hausübung H24 (Diagonalisierung) **4+3+3 Punkte**

(a) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ quadratische Matrizen. A und B heißen ähnlich, wenn eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B = SAS^{-1}$ existiert.
Zeigen Sie: Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten bezüglich des *Standardskalaprodukts* orthogonal sind.

(c) Gegeben sei die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von C. Konstruieren Sie zudem eine orthogonale Matrix Q aus Eigenvektoren von C und berechnen Sie $D = Q^T CQ$.

Hausübung H25 (Basiswechsel) **3+7 Punkte**

Gegeben sei $\mathbb{P}_3$, der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3. Weiter seien durch

$$\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2, x^3\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2 := \{1, x-1, x^2-3x+2, x^3-6x^2+11x-6\}$$

zwei Basen von $\mathbb{P}_3$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix S, welche die Koordinatendarstellung bezüglich $\mathcal{B}_1$ in die Koordinatendarstellung bezüglich $\mathcal{B}_2$ überführt.

(b) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{P}_3, \qquad p(x) \mapsto p'(x) + p(x)$$

die Darstellungsmatrizen $L_{\mathcal{B}_1}$ und $L_{\mathcal{B}_2}$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$.

mündliche Aufgabe M21 (Skalarprodukt) **2 Punkte**

In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V sei ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erklärt. Für zwei Vektoren $u, w \in V$ definiere die Matrix

$$G := \begin{pmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, w\rangle \\ \langle w, u\rangle & \langle w, w\rangle \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $\det G \neq 0$ genau dann, wenn die Vektoren u und w linear unabhängig sind.
Hinweis: Es gilt der Zusammenhang $\langle u, w\rangle = \|u\|\|w\| \cos \measuredangle(u, w)$.

mündliche Aufgabe M22 (Skalarprodukt) **2 Punkte**

Welche der Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$?

Gruppenübung T25 (orthogonale Matrix)

Gegeben sei $\mathbb{P}_2$, der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Weiter sei durch

$$L : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2, \qquad p(x) \mapsto x \cdot p'(x).$$

eine lineare Abbildung gegeben. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der Abbildung bezüglich der Monombasis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.

Gruppenübung T26 (Darstellende Matrix)
Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_i}$ der linearen Abbildung

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x,y) = \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

bezüglich folgender Basen

(a) $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (Standardbasis),

(b) $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

(c) $\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Berechnen Sie weiterhin die Determinanten dieser darstellenden Matrizen und die Transformationsmatrizen bezüglich aller Basiswechsel.

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 27. Januar 2014, 11:00 Uhr** in den mit "'Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft"' gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie Ihre Lösungen direkt vor der Übung ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer.
Webseite: `http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/math1infowirt2013w/`.
Beachten Sie: Eine Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn der Lösungsweg vollständig mit angegeben ist.