Kapitel 3

Topologische Begriffe

3.1 Inneres, Rand und Abschluss von Mengen

Definition (innerer Punkt und Inneres). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, und sei $M \subseteq V$ eine Menge. Ein Vektor $v \in M$ heißt *innerer Punkt* von M, falls eine positive Zahl $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(v) \subseteq M$ gilt. Die Menge aller inneren Punkte von M wird das *Innere* von M genannt und mit M° bezeichnet.

Wir erinnern uns, dass mit $B_\varepsilon(v)$ die offene Kugel in einem normierten Raum mit Mittelpunkt v und Radius ε bezeichnet wird. Gemäß Definition sind die inneren Punkte einer Menge M stets Element von M. Daher gilt

$$M^\circ \subseteq M$$

für jede eine Teilmenge M eines normierten Raums über $\mathbb{K}$. Zu beachten ist, dass das Innere einer Menge leer sein kann. Das ist bespielsweise für *einpunktige* Mengen der Fall. Unter einpunktigen Mengen versteht man dabei Mengen von der Form $\{v\}$ mit $v \in V$.

Definition (Randpunkt und Rand). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, und sei $M \subseteq V$ eine Menge. Ein Vektor $v \in V$ heißt *Randpunkt* von M, für jede positive Zahl $\varepsilon > 0$ zwei Vektoren $v_0, v_1 \in B_\varepsilon(v)$ existieren, so dass $v_0 \notin M$ und $v_1 \in M$ gilt. Die Menge aller Randpunkte von M wird der *Rand* von M genannt und mit ∂M bezeichnet.

Man beachte, dass die Randpunkte einer Menge M nicht notwendigerweise Elemente von M sind. Daher ist ∂M in der Regel keine Teilmenge von M.

Man kann leicht zeigen, dass das Innere einer Menge und der Rand einer Menge disjunkt sind, d.h. dass

$$M^\circ \cap \partial M = \emptyset$$

für jede Menge M gilt. Außerdem überlegt man sich leicht, dass der Rand einer Menge selbst keine inneren Punkte enthält, d.h. dass

$$(\partial M)^\circ = \emptyset$$

für jede Menge M gilt. Schließlich kann man zeigen, dass für jede Menge M die Identität

$$\partial(\partial M) = \partial M$$

gilt. Neben dem Inneren und dem Rand einer Menge betrachtet man häufig auch den so genannten Abschluss einer Menge.

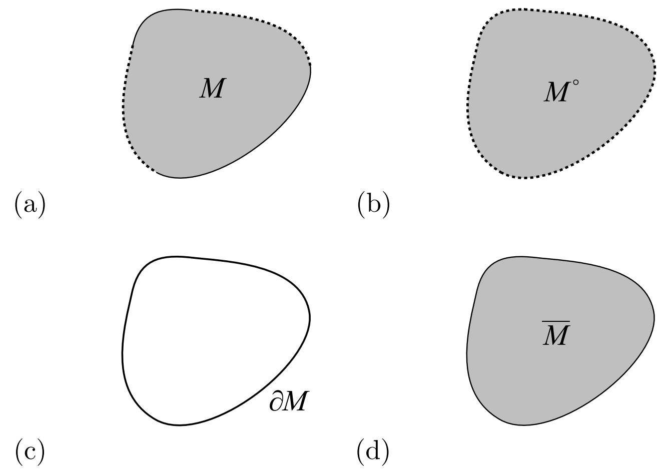

Abbildung 3.1: (a) Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^2$. (b) Das Innere von M. (c) Der Rand von M. (d) Der Abschluss von M.

Definition (Abschluss, abgeschlossene Hülle). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, und sei $M \subseteq V$ eine Menge. Dann heißt die Menge

$$\overline{M} := M \cup \partial M$$

der *Abschluss* oder die *abgeschlossene Hülle* von M.

Da der Abschluss einer Menge M die Vereinigung von M selbst und dem Rand von M ist, folgt unmittelbar, dass

$$M \subseteq \overline{M}$$

für jede eine Teilmenge M eines reellen oder komplexen normierten Raums. In Abbildung 3.1 werden das Innere, der Rand und der Abschluss einer Menge durch Skizzen veranschaulicht. Nachfolgend geben wir außerdem einige wichtige Beispiele an.

Beispiele.

(a) Wir betrachten den normierten Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Inneres, Rand und Abschluss eines nichtleeren Intervalls $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ mit Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ sind dann durch

$$[a, b)^\circ = (a, b),$$
$$\partial[a, b) = \{a, b\},$$
$$\overline{[a, b)} = [a, b]$$

gegeben. Die Randpunkte des Intervalls $[a, b)$ sind also genau die Intervallgrenzen a und b. Man beachte außerdem, dass man für die Intervalle (a, b), $[a, b]$ und $(a, b]$ dasselbe Innere, denselben Rand sowie denselben Abschluss erhält wie für das hier betrachtete Intervall $[a, b)$.

(b) Für jede offene Kugel $B_r(v)$ in einem normierten Raum gilt

$$B_r(v)^\circ = B_r(v),$$
$$\partial B_r(v) = S_r(v).$$

(c) In jedem normierten Raum ist die abgeschlossene Kugel $\overline{B_r(v)}$ der Abschluss der offenen Kugel $B_r(v)$.

(d) Im normierten Raum $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ betrachten wir die *Verbindungsstrecke*

$$S := \{x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in [0,1],\ x_2 = x_1\},$$

zwischen den Punkten $(0,0)^{\mathrm{T}}$ und $(1,1)^{\mathrm{T}}$. Dann gilt $S^\circ = \emptyset$, $\partial S = S$ und $\overline{S} = S$.

(e) Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, so überlegt man sich leicht, dass

$$\begin{aligned} V^\circ &= V, \\ \partial V &= \emptyset, \\ \overline{V} &= V. \end{aligned}$$

gilt. Fass man die leere Menge $\emptyset$ als Teilmenge von V auf, so erhält man außerdem $\emptyset^\circ = \partial\emptyset = \overline{\emptyset} = \emptyset$. ◊

Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie für $i = 1,2,3,4$ die Mengen $(\overline{M_i})^\circ$ und $M_i \cap \partial M_i$, wobei

$$\begin{aligned} M_1 &:= (-1,0), \\ M_2 &:= [1,2], \\ M_3 &:= (-2,0) \cup (0,2), \\ M_4 &:= \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   Fassen Sie dabei alle Mengen als Teilmengen von $\mathbb{R}$ auf.

2. Bestimmen Sie $\partial S \setminus S$ für die Menge $S := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

3. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge $M \subseteq V$ die folgenden Aussagen gelten:

   - $M^\circ \cap \partial M = \emptyset$
   - $(\partial M)^\circ = \emptyset$
   - $\partial(\partial M) = \partial M$

4. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq V$ die Identität $\partial(A \cap B) = (\partial A \cap B) \cup (A \cap \partial B)$ gilt.

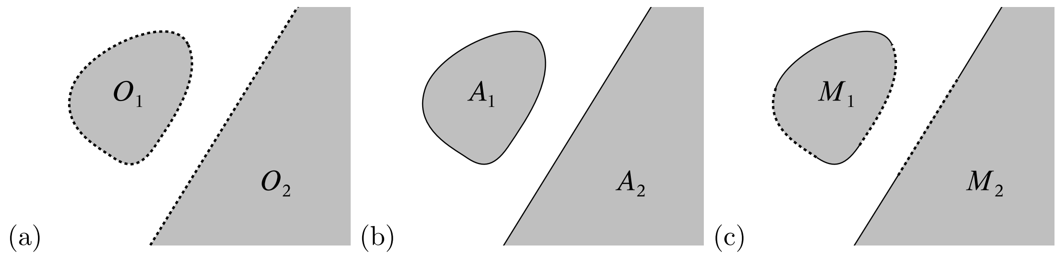

Abbildung 3.2: (a) Offene Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. (b) Abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ (c) Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, welche weder offen noch abgeschlossen sind.

3.2 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition (offene Menge). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Eine Menge $O \subseteq V$ heißt *offen*, wenn jedes Element $v \in O$ ein innerer Punkt von O ist.

Definition (abgeschlossene Menge). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Eine Menge $A \subseteq V$ heißt *abgeschlossen*, wenn die Menge $V \setminus A$ offen ist.

Die Adjektive „offen“ und „abgeschlossen“ legen nahe, dass eine Menge genau dann offen ist, wenn sie nicht abgeschlossen ist. **Dies ist aber nicht der Fall!** Wie wir anhand einzelner Beispiele sehen werden, gibt es Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind. Ferner gibt es Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Für die Identifizierung offener und abgeschlossener Mengen ist der nachfolgende Satz sehr hilfreich.

Satz 3.1 (Charakterisierung offener und abgeschlossener Mengen). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, und sei M eine Teilmenge von V eine Menge. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(1) M ist genau dann offen, wenn $M = M^\circ$ gilt.

(2) M ist genau dann abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$ gilt.

Aus Satz 3.1 folgt insbesondere, dass das Innere einer Menge offen, und dass der Abschluss einer Menge abgeschlossen ist. Ferner gilt

$$\overline{\partial M} = \partial M \cup \partial(\partial M) = \partial M \cup \partial M = \partial M,$$

für jede Menge M, weshalb der Rand einer Menge abgeschlossen ist. Wir geben nun noch einige Beispiele für offene und abgeschlossene Mengen an, wie auch Beispiel für Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind.

Beispiele.

(a) Jedes offene Intervall (a, b) mit Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, und jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(b) Unbeschränkte Intervalle der Form (a, ∞) und $(-\infty, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sind offene Teilmengen von $\mathbb{R}$. Unbeschränkte Intervalle der Form $[a, \infty)$ und $(-\infty, b]$ sind abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(c) Intervalle der Form $[a, b)$ und $(a, b]$ mit Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ sind weder offen noch abgeschlossen.

(d) Jede offene Kugel $B_r(v)$ in einem normierten Raum ist offen. Wegen $S_r(v) = \partial B_r(v)$ ist jede Sphäre in einem normierten Raum abgeschlossen. Ferner ist jede abgeschlossene Kugel $\overline{B_r(v)}$ in einem normierten Raum abgeschlossen.

(e) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Fasst man die leere Menge $\emptyset$ als Teilmenge von V auf, so gilt $\emptyset = \emptyset^\circ$. Also ist $\emptyset$ offen. Außerdem gilt $V^\circ = V$, weshalb V offen ist. Offenbar gilt aber auch $V \setminus \emptyset = V$ und $V \setminus V = \emptyset$, woraus folgt, dass die Mengen $\emptyset$ und V sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Die Abgeschlossenheit einer Menge A kann auch über das Konvergenzverhalten der Folgen in A charakterisiert werden.

Satz 3.2 (**Folgenkriterium für Abgeschlossenheit**)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge in A ein Element von A ist.

Mit Hilfe des von Satz 3.2 bereit gestellten Folgenkriteriums, kann man oft die Abgeschlossenheit einer Menge widerlegen. Man betracht dazu das folgende Beispiel.

Beispiel. Wir betrachten das Intervall $(0, 1] \subset \mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_n := 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist offenbar eine Folge in $(0, 1]$, die gegen Null konvergiert. Da die Zahl 0 jedoch kein Element von $(0, 1]$ ist, kann das Intervall $(0, 1]$ nach Satz 3.2 nicht abgeschlossen sein.

Als nächstes untersuchen wir, was man über Vereinigungen oder Durchschnitte offener bzw. abgeschlossener Mengen aussagen kann.

Satz 3.3. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(1) Sei $(O_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Teilmengen von V. Dann ist die Vereinigung

$$\bigcup_{i\in I} O_i := \{v \in V \mid \exists i \in I: \ v \in O_i\}$$

ebenfalls eine offene Teilmenge von V.

(2) Sei $O_1, O_2, \ldots, O_m$ eine endliche Anzahl offener Teilmengen von V. Dann ist der Durchschnitt $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_m$ ebenfalls eine offene Teilmenge von V.

(3) Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von V. Dann ist der Durchschnitt

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{v \in V \mid \forall i \in I: \ v \in A_i\}$$

ebenfalls eine abgeschlossene Teilmenge von V.

(4) Sei $A_1, A_2, \ldots, A_m$ eine endliche Anzahl abgeschlossener Teilmengen von V. Dann ist die Vereinigung $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ ebenfalls eine abgeschlossene Teilmenge von V.

Die Aussagen von Satz 3.3 können folgendermaßen zusammengefasst werden: Die Vereinigung beliebig vieler, sowie der Durschnitt endlich vieler offenen Mengen ist offen, und der Durchschnitt beliebig vieler, sowie die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Dass die Aussagen (2) und (4) von Satz 3.3 tatsächlich nur für endlich viele offene bzw. abgeschlossene Mengen gelten können, soll anhand der folgenden Beispiele verdeutlicht werden.

Beispiele.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei das offene Intervall $I_n \subset \mathbb{R}$ durch $I_n := (-1/n, 1/n)$ definiert. Man kann leicht zeigen, dass

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0\}$$

gilt. Die einpunktige Menge $\{0\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei das abgeschlossene Intervall $I_n \subset \mathbb{R}$ durch $I_n := [-n, n]$ definiert. Man überlegt sich leicht, dass dann

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \mathbb{R}$$

gilt. Offenbar ist $\mathbb{R}$ eine offene Menge.

Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind.

$$O_1 := (-1,1) \setminus \{0\},$$
$$O_2 := \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha, \alpha+1),$$
$$O_3 := \mathbb{R} \setminus \big([-3,-2] \cup [2,3]\big),$$
$$O_4 := \{1/x \mid x > 0\}.$$

2. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, und sei $O \subseteq V$ eine offene und $A \subseteq V$ eine abgeschlossene Menge. Zeigen Sie, dass $O \setminus A$ offen und $A \setminus O$ abgeschlossen ist.

3. Zeigen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums für Abgeschlossenheit, dass jede nach unten beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Minimum besitzt. Zeigen Sie außerdem, dass jede nach oben beschränkte, abgeschlossene Menge ein Maximum besitzt.

4. Untersuchen Sie die folgenden Mengen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ auf Offenheit und Abgeschlossenheit.

$$M_1 := [0,1] \times (0,1],$$
$$M_2 := \overline{B_1(0)} \setminus \{0\},$$
$$M_3 := \big\{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x_2 > 1\big\},$$
$$M_4 := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2.$$

Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sei dabei mit der euklidischen Norm versehen.

3.3 Beschränktheit

Definition (beschränkte Menge). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Eine Menge $B \subseteq V$ heißt *beschränkt*, wenn es eine positive Zahl $R > 0$ gibt, so dass $\|b\| \leq R$ für alle $b \in B$ gilt.

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist eine Teilmenge $B \subseteq V$ offenbar genau dann beschränkt, wenn eine nichtnegative Zahl $R \geq 0$ existiert, so dass

$$B \subseteq \overline{B_R(0)}$$

gilt, wobei $\overline{B_R(0)}$ die abgeschlossene Kugel um den Ursprung in V mit Radius R bezeichnet. Dies bedeutet insbesondere, dass die leere Menge $\emptyset$ eine beschränkte Menge ist. Eine Menge $B \subseteq V$ ist auch dann beschränkt, wenn ein Vektor $v \in V$ und eine nichtnegative Zahl $r \geq 0$ existiert, so dass

$$B \subseteq \overline{B_r(v)}$$

gilt. Man kann nämlich leicht zeigen, dass dann

$$\overline{B_r(v)} \subseteq \overline{B_{\|v\|+r}(0)}$$

für alle $v \in V$ und alle $r > 0$ gilt. Da $\|v\|+r$ eine nichtnegative Zahl ist, hat man somit eine abgeschlossene Kugel um den Ursprung in V gefunden, welcher die Menge B als Teilmenge enthält.

In Abschnitt 2.3 wurden bereits das Konzept der Beschränktheit nach oben sowie das Konzept der Beschränktheit nach unten für Teilmengen von $\mathbb{R}$ eingeführt. Das folgende Lemma bringt diese Konzepte mit dem Konzept der Beschränktheit für Teilmengen normierter Räume in Verbindung.

Lemma 3.4. Eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn sie nach unten und nach oben beschränkt ist.

Als nächstes gehen wir der Frage nach, was man über Vereinigungen und Durchschnitte beschränkter Mengen aussagen kann.

Satz 3.5. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(1) Sei $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie beschränkter Teilmengen von V. Dann ist der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} B_i$$

ebenfalls eine beschränkte Teilmenge von V.

(2) Sei $B_1, B_2, \ldots, B_m$ eine endliche Anzahl beschränkter Teilmengen von V. Dann ist die Vereinigung $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$ ebenfalls eine beschränkte Teilmenge von V.

Satz 3.5 besagt, dass der Durchschnitt beliebig vieler und die Vereinigung endlich vieler beschränkter Mengen wieder beschränkt ist. Die Vereinigung unendlich vieler beschränkter Mengen, muss hingegen nicht beschränkt sein, wie das nachfolgende Beispiel verdeutlicht.

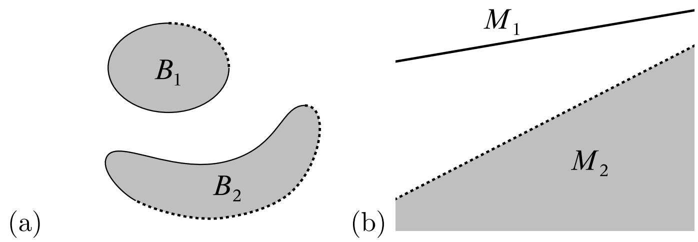

Abbildung 3.3: (a) Beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. (b) Die Gerade M_1 und der Halbraum M_2 sind Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, welche nicht beschränkt sind.

Beispiel. Für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ sei das abgeschlossene Intervall $I_k := [k, k+1]$ definiert. Offenbar ist jedes dieser Intervalle beschränkt. Als Vereinigung aller Intervalle erhält man jedoch die Menge

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k = \mathbb{R},$$

welche nicht beschränkt ist. $\Diamond$

Als nächsten übertragen wir das Konzept der Beschränktheit auf Folgen in einem normierten Raum.

Definition (beschränkte Folge). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V heißt *beschränkt*, wenn die Menge aller Folgenglieder beschränkt ist.

Offenbar ist eine Folge genau dann beschränkt, wenn man eine positive Zahl $R > 0$ finden kann, so dass alle Folgenglieder Elemente der abgeschlossenen Kugel $\overline{B_R(v)}$ sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\|v_n\| \leq R$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Eine reelle Zahlenfolge ist nach Lemma 3.4 genau dann beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist. Man betrachte hierzu auch die folgenden Beispiele.

Beispiele.

(a) Jede konstante Folge ist beschränkt.

(b) Die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch $a_n := 1 - 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist durch 0 nach unten und durch 1 nach oben beschränkt. Also ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.

(c) Die Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ sei durch

$$x^{(k)} := \begin{pmatrix} \sin(k) \\ \cos(k) \end{pmatrix}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert. Man rechnet leicht nach, dass $|x^{(k)}| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, weshalb die Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist.

(d) Die Folge $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$, welche durch

$$y^{(k)} := \begin{pmatrix} k \\ 1/k \end{pmatrix}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert ist, ist nicht beschränkt. Man kann nämlich leicht zeigen, dass $|y^{(k)}| > k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Entsprechend findet man zu jeder positiven Zahl $R > 0$ eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass $x^{(k)} \notin \overline{B_R(0)}$ gilt.

Für konvergente Folgen gilt die folgende Aussage.

Lemma 3.6. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beschränktheit ist also ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz von Folgen. Abschließend führen wir noch das Konzept beschränkter Funktionen ein.

Definition (beschränkte Funktion). Sei X eine nichtleere Menge, und sei $(W, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Funktion $f : X \to W$ heißt *beschränkt*, wenn ihre Wertemenge beschränkt ist. Die Menge aller beschränkten Funktionen von X nach W wird mit $B(X, W)$ bezeichnet. Falls $W = \mathbb{R}$ gilt, bezeichnet man diese Menge auch mit $B(X)$.

Übungsaufgaben

1. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass

$$\overline{B_r(v)} \subseteq \overline{B_{\|v\|+r}(0)}$$

für jeden Vektor $v \in V$ und jede positive Zahl $r > 0$ gilt.

2. Untersuchen Sie die reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Beschränktheit. Die Folgen sind durch

$$\begin{aligned} a_n &:= (-1)^n, \\ b_n &:= \frac{2n^3 + n}{n^3 + 1}, \\ c_n &:= -\frac{n^4 - 3}{n^2 + 2}, \\ d_n &:= \sin(n) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

3. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Beschränktheit.

$$\begin{aligned} &f_1 : (-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2, \\ &f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \\ &f_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/|x|, \\ &f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$ und $M \subseteq V$ eine Menge, die nicht beschränkt ist. Zeigen Sie, dass dann eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M existiert, so dass $\|v_n\| \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3.4 Kompakte Mengen

Definition (Überdeckung). Sei X eine beliebige Menge, und sei $M \subseteq X$ eine Teilmenge von X. Eine Familie $(M_i)_{i\in I}$ bestehend aus Teilmengen von X wird eine *Überdeckung* von M genannt, wenn

$$M \subseteq \bigcup_{i\in I} M_i$$

gilt, d.h. wenn die Vereinigung aller zur Familie gehörenden Mengen die Menge M *überdeckt*.

Definition (offene Überdeckung). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, und sei M eine Teilmenge von V. Eine Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von M heißt *offen*, wenn für jeden Index $i \in I$ die Menge O_i offen ist.

Definition (kompakte Menge). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Eine Menge $K \subseteq V$ heißt *kompakt*, wenn man aus jeder offenen Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ der Menge K endlich viele offene Mengen $O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_m}$ auswählen kann, so dass $K \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_m}$ gilt.

Die definierende Eigenschaft kompakter Mengen kann nur schwer veranschaulicht werden. Es genügt nicht sich vorzustellen, dass eine Menge kompakt ist, wenn sie mit einer endlichen Anzahl offener Mengen überdeckt werden kann. Das gilt nämlich für jede Teilmenge eines normierten Raums. Vielmehr ist eine Menge M genau dann kompakt, wenn man aus *jeder* Familie offener Mengen, deren Vereinigung M überdeckt, eine endliche Teilfamilie auswählen kann, deren Vereinigung die Menge M ebenfalls überdeckt. Im allgemeinen ist es schwierig zu entscheiden, ob eine Menge kompakt ist oder nicht. Wir wollen hier zwei sehr einfache Fälle betrachten, in denen dies möglich ist.

Beispiel.

(a) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, und sei $v \in V$ ein beliebiger Vektor. Dann ist die einpunktige Menge $\{v\}$ kompakt. Ist nämlich $(O_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von $\{v\}$, so gilt

$$\{v\} \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i,$$

und somit auch

$$v \in \bigcup_{i\in I} O_i.$$

Daraus folgt wiederum, dass mindestens ein Index $i_1 \in I$ existiert, so dass $v \in O_{i_1}$ gilt. Dann gilt aber auch $\{v\} \subseteq O_{i_1}$, was bedeutet, dass O_{i_1} die Menge $\{v\}$ bereits überdeckt.

(b) Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Definiert man zu jeder ganzen Zahl $k \in \mathbb{Z}$ das offene Intervall $I_k := (k - 1/3, k + 1/3)$, so ist $(I_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{Z}$, welche aus unendlich vielen Intervallen besteht. Man erkennt leicht, dass für jede nichtleere Teilmenge $N \subseteq \mathbb{Z}$ die Familie $(I_k)_{k\in\mathbb{Z}\setminus N}$ keine Überdeckung von $\mathbb{Z}$ ist. Daher kann es keine endliche Anzahl von Intervallen $I_{k_1}, I_{k_2}, \ldots, I_{k_m}$ geben, so dass $I_{k_1} \cup I_{k_2} \cup \cdots \cup I_{k_m}$ die Menge $\mathbb{Z}$ überdeckt. Also ist $\mathbb{Z}$ keine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

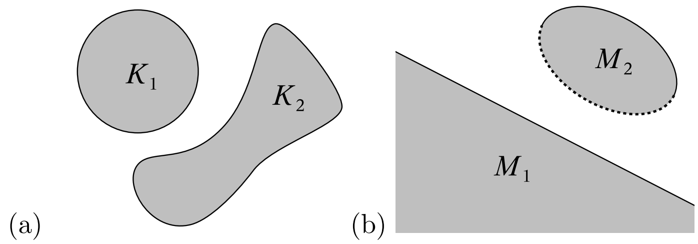

Abbildung 3.4: (a) Kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. (b) Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, welche nicht kompakt sind.

Die Kompaktheit einer Menge K kann man auch über das Konvergenzverhalten aller Folgen in K charakterisieren.

Satz 3.7 (**Folgenkriterium für Kompaktheit**)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Eine Teilmenge $K \subseteq V$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K besitzt.

Als nächstes untersuchen wir die Eigenschaften kompakter Mengen.

Satz 3.8. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, und sei $K \subseteq V$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen.

Satz 3.8 besagt, dass Abgeschlossenheit und Beschränktheit notwendige Bedingungen für die Kompaktheit sind. Entsprechend kann man diesen Satz verwenden, um zu zeigen, dass bestimmte Mengen nicht kompakt sind.

Beispiele.

(a) Offene Intervalle (a, b), sowie Intervalle der Form $(a, b]$ und $[a, b)$ mit Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ sind nicht abgeschlossen. Daher sind sie auch nicht kompakt.

(b) Intervalle der Form $[a, \infty)$ und $(-\infty, b]$ mit Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ sind nicht beschränkt, weshalb sie auch nicht kompakt sind. $\Diamond$

Für Teilmengen der Vektorräume $\mathbb{R}^n$ kann man zeigen, dass Beschränktheit und Abgeschlossenheit nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedingungen für Kompaktheit sind. Der entsprechende Satz ist als *Satz von Heine–Borel* bekannt.

Satz 3.9 (**Heine–Borel**)**.** Eine Teilmenge des $\mathbb{K}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Dies gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die praktische Anwendung des Satzes von Heine–Borel soll hier durch einige Beispiele verdeutlicht werden.

Beispiele.

(a) Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kann als eindimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ aufgefasst werden. Abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ mit Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ sind sowohl abgeschlossen als auch beschränkt. Nach dem Satz von Heine–Borel sind solche Intervalle also kompakt.

(b) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sind die abgeschlossenen Kugeln $\overline{B_r(x)}$ und die Sphären $S_r(x)$ in $\mathbb{K}^n$ sowohl abgeschlossen als auch beschränkt. Nach dem Satz von Heine–Borel sind diese Mengen also kompakt. $\Diamond$

Eine wichtige Folgerung aus dem Folgenkriterium für Kompaktheit (siehe Satz 3.7) und dem Satz von Heine–Borel (siehe Satz 3.9) ist der *Satz von Bolzano–Weierstraß*.

Satz 3.10 (Bolzano–Weierstraß). Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Dies gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Übungsaufgaben

1. Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ auf Kompaktheit:

$$\begin{aligned} M_1 &:= [1,2] \cup [3,4], \\ M_2 &:= [-1,1] \setminus \{0\}, \\ M_3 &:= \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}, \\ M_4 &:= \mathbb{N}. \end{aligned}$$

2. Zeigen Sie unter Verwendung der Sätze 3.3, 3.5 und 3.9, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ der Durchschnitt beliebig vieler und die Vereinigung endlich vieler kompakter Teilmengen von $\mathbb{K}^n$ ebenfalls kompakt ist.

3.5 Vollständigkeit

Definition (Cauchy–Folge). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V heißt *Cauchy–Folge*, wenn für jede positive Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\|v_n - v_m\| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq m \geq N$$

gilt.

Anschaulich gesprochen ist eine Folge genau dann eine Cauchy–Folge, wenn ihre Folgenglieder für wachsende Indizes immer enger zusammenrücken. Oft ist die folgende Charakterisierung von Cauchy–Folgen hilfreich: Eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ über $\mathbb{K}$ ist genau dann eine Cauchy–Folge, wenn für jede positive Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ aus $\min\{m, n\} \geq N$ stets $\|v_n - v_m\| < \varepsilon$ folgt. Das nachfolgende Lemma besagt, dass dies insbesondere dann der Fall ist, wenn die Folge gegen einen Grenzwert konvergiert.

Lemma 3.11. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy–Folge.

Wir wissen bereits, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Das folgende Lemma liefert eine analoge Aussage für Cauchy–Folgen und somit eine notwendige Bedingung dafür, dass eine Folge eine Cauchy–Folge sein kann.

Lemma 3.12. Jede Cauchy–Folge ist beschränkt.

Es stellt sich nun die folgende Frage: Angenommen, man hat eine Cauchy–Folge, deren Glieder allesamt Elemente einer nichtleeren Teilmenge M eines normierten Raums sind. Kann man dann schließen, dass die Folge einen Grenzwert besitzt, der ebenfalls ein Element von M ist? Es zeigt sich, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist. Aus diesem Grund führt man die Eigenschaft der *Vollständigkeit* für Teilmengen eines normierten Raums ein.

Definition (vollständige Menge). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Eine Teilmenge $M \subseteq V$ heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy–Folge in M gegen ein Element von M konvergiert.

Eine nicht vollständige Teilmenge eines normierten Raums wird *unvollständig* genannt. Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, dann ist der Vektorraum V selbst ebenfalls eine Teilmenge von V. Daher kann man die Eigenschaft der Vollständigkeit auch für V definieren. Dies führt auf den wichtigen Begriff eines *Banach–Raums* bzw. den eines *Hilbert–Raums*.

Definition (Banach–Raum). Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ über $\mathbb{K}$ heißt *Banach–Raum* über $\mathbb{K}$, wenn V vollständig ist.

Definition (Hilbert–Raum). Ein Innenproduktraum $(V, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ über $\mathbb{K}$ heißt *Hilbert–Raum* über $\mathbb{K}$, wenn V bezüglich der vom Skalarprodukt $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ induzierten Norm $\|\cdot\|$ vollständig ist, d.h. wenn $(V, \|\cdot\|)$ ein Banach–Raum über $\mathbb{K}$ ist.

Da jede normierte Algebra insbesondere auch ein normierter Raum ist, kann man den Begriff der Vollständigkeit auch auf normierte Algebren übertragen. Man kommt dann zu so genannten *Banach–Algebren*.

Definition (Banach–Algebra). Eine normierte Algebra $(V, \|\cdot\|)$ über $\mathbb{K}$ heißt *Banach–Algebra* über $\mathbb{K}$, wenn V vollständig ist.

Wir geben hier noch ein hinreichendes Kriterium für die Vollständigkeit einer Menge an.

Satz 3.13. Jede kompakte Menge ist vollständig.

Von besonderem Interesse sind die vollständigen Teilmengen der normierten Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Der folgende Satz liefert eine entsprechende Charakterisierung.

Satz 3.14. Eine Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ ist genau dann vollständig, wenn sie abgeschlossen ist. Dies gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wie wir bereits wissen, ist der normierte Raum $\mathbb{K}^n$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen. Nach Satz 3.14 ist $\mathbb{K}^n$ also vollständig und somit ein Banach–Raum über $\mathbb{K}$. Versieht den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ darüber hinaus mit einem Skalarprodukt, so erhält man einen Hilbert–Raum über $\mathbb{R}$.

Es ist wichtig zu wissen, dass in allgemeinen normierten Räumen über $\mathbb{K}$ die Abgeschlossenheit einer Menge nicht gleichbedeutend mit deren Vollständigkeit ist. Die Teilmengen der normierten Räume $\mathbb{K}^n$ nehmen in dieser Hinsicht also eine Sonderstellung ein.

Als nächstes wollen wir noch ein wichtiges Beispiel für eine unvollständige Teilmenge von $\mathbb{R}$ kennen lernen.

Beispiel. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist eine unvollständige Teilmenge von $\mathbb{R}$. Man betrachte dazu die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche gemäß

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definiert ist. Da jedes Glied dieser Folge durch Addition, Multiplikation und Division von Bruchzahlen entsteht, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$. Man kann außerdem zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ konvergiert. Da die Folge konvergent ist, ist sie auch eine Cauchy–Folge. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy–Folge in $\mathbb{Q}$, die gegen einen Grenzwert konvergiert, der nicht Element von $\mathbb{Q}$ ist.

Man beachte, dass aufgrund von Satz 3.14 die Menge $\mathbb{Q}$ auch nicht abgeschlossen ist. Dies kann man auch mit Hilfe des Folgenkriteriums für die Abgeschlossenheit einer Menge zeigen (siehe Satz 3.2).

Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass die reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy–Folgen in $\mathbb{R}$ sind. Die Folgen seien dabei durch
$$a_n := \frac{(-1)^n}{n},$$
$$b_n := \frac{1}{3^n}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Lösen Sie diese Aufgabe ohne Verwendung von Lemma 3.11, indem Sie die definierende Eigenschaft von Cauchy–Folgen nachweisen.
2. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, seien $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Cauchy–Folgen in V, und sei $\alpha \in \mathbb{K}$ ein beliebiger Skalar. Zeigen Sie, dass die Folgen $(v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\alpha v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls Cauchy–Folgen in V sind.

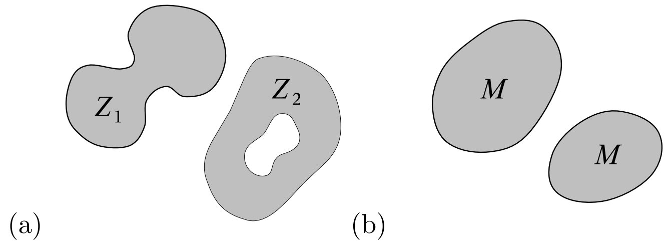

Abbildung 3.5: (a) Zusammenhängende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ (b) Eine nicht zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

3.6 Zusammenhängende Mengen

Definition (zusammenhängende Menge). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Eine Menge $M \subseteq V$ wird *nicht zusammenhängend* genannt, wenn es zwei offene Mengen $O_1, O_2 \subseteq V$ gibt, so dass $M \subseteq O_1 \cup O_2$ und $O_1 \cap M \neq \emptyset$ und $O_2 \cap M \neq \emptyset$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ gilt. Anderfalls heißt die Menge M *zusammenhängend*.

Die mathematische Definition zusammenhängender Mengen ist auf den ersten Blick eher unanschaulich. In den meisten Fällen genügt die Vorstellung, dass eine Menge genau dann zusammenhängend ist, wenn sie nicht aus mehreren separaten, nichtleeren Teilmengen besteht (siehe Abbdildung 3.5). Was genau mit „separat“ gemeint ist, wird durch die mathematische Definition präzisiert: Zwei nichtleere Teilmengen werden als separat angesehen, wenn sie in verschiedenen, disjunkten, offenen Mengen enthalten sind. Man betrachte hierzu auch die nachfolgenden Beispiele.

Beispiele.

(a) Jede offene Kugel $B_r(v)$ und jede abgeschlossene Kugel $\overline{B_r(v)}$ in einem normierten Raum über $\mathbb{K}$ ist zusammenhängend.

(b) Die Menge $M = [-2, -1] \cup [1, 2]$ ist nicht zusammenhängend. Definiert man nämlich die offenen Intervalle $O_1 := (-3, 0)$ und $O_2 := (0, 3)$, so gilt $M \subseteq O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap M = [-2, 1]$, $O_2 \cap M = [1, 2]$ und $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.

Das folgende Lemma ist oft nützlich, um zusammenhängende Mengen zu identifizieren.

Lemma 3.15. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, sei $M \subset V$ eine zusammenhängende Menge, und sei $Z \subseteq V$ eine weitere Menge, so dass $M \subseteq Z \subseteq \overline{M}$ gilt. Dann ist Z ebenfalls zusammenhängend.

Der folgende wichtige Satz charakterisiert die nichtleeren, zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Satz 3.16. Eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.

Wir erinnern daran, dass der Begriff „Intervall“ sämtliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ einschließt, welche von der Form (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞) und $[a, \infty)$ sind. Auch die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ selbst ist ein Intervall, welches gelegentlich als $(-\infty, \infty)$ bezeichnet wird. Der Satz 3.16 besagt also auch, dass die Menge $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist.

Übungsaufgaben

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ zusammenhängend sind.

$$\begin{aligned} M_1 &:= (-\infty, 2) \cap (-2, \infty), \\ M_2 &:= \mathbb{Z}, \\ M_3 &:= (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ M_4 &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n). \end{aligned}$$

   Verwenden Sie nach Möglichkeit Satz 3.16.

2. Zeigen Sie durch Angabe jeweils eines Gegenbeispiels, dass die Vereinigung und der Durchschnitt von zwei zusammenhängenden Mengen im Allgemeinen nicht zusammenhängend ist.

3. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass jede einpunktige Menge $\{v\}$, mit $v \in V$, zusammenhängend ist.

4. Zeigen Sie, dass jede abgeschlossene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$, welche nach oben, nicht aber nach unten beschränkt ist, ein Intervall von der Form $(-\infty, b]$ mit $b \in \mathbb{R}$ ist.

Lernzielkontrolle

Nach dem Durcharbeiten diese Kapitels sollten Sie...

- ... wissen, was ein *innerer Punkt* und was das *Innere* einer Menge ist.
- ... wissen, was ein *Randpunkt* und was der *Rand* einer Menge ist.
- ... wissen, was der *Abschluss* einer Menge ist.
- ... wissen, was eine *offene* und was eine *abgeschlossene* Menge ist.
- ... wissen, was *beschränkte* Mengen, Folgen und Funktionen sind.
- ... den *Satz von Heine–Borel* kennen.
- ... wissen, was eine *Cauchy–Folge* ist.
- ... wissen, dass jede konvergente Folge eine Cauchy–Folge ist.
- ... wissen, dass jede konvergente Folge und jede Cauchy–Folge beschränkt ist.
- ... wissen, was es bedeutet, dass die Menge $\mathbb{R}$ vollständig ist, und dass die Menge $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist.
- ... wissen, was ein *Banach–Raum* und was ein *Hilbert–Raum* ist.
- ... wissen, was eine *zusammenhängende* Menge ist.
- ... wissen, dass Intervalle die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind.