Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Prof. Dr. A. Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann
Sommersemester 2009

Mathematische Methoden in der Medizintechnik

Exkurs: Spherical Harmonics

Definition und Eigenschaften

Die Einschränkungen von homogenen harmonischen Polynomen vom Grad l auf die Einheitssphäre S^2 heißen Spherical Harmonics bzw. Kugelfunktionen von der Ordnung l. Es gibt genau $2l+1$ Spherical Harmonics von der Ordnung l und diese Funktionen sind gegeben durch

$$Y_{l,m}(\theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\psi) e^{im\varphi} \quad \text{für } m = -l, \dots, l \text{ und } l \geq 0.$$

Hierbei schreiben wir $\theta = (\sin\psi\cos\varphi, \sin\psi\sin\varphi, \cos\psi)^T$ in Kugelkoordinaten und mit P_l^m bezeichnen wir die assoziierten Legendre-Polynome. Die Spherical Harmonics bilden ein vollständiges Orthonormalsystem des $L^2(S^2)$, d.h. sie erfüllen die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{S^2} \overline{Y}_{l,m}(\theta) Y_{l',m'}(\theta)\, d\theta = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}$$

und eine beliebige $L^2(S^2)$-Funktion f ist darstellbar durch

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \int_{S^2} f(\theta')\overline{Y}_{l,m}(\theta')\, d\theta' Y_{l,m}(\theta).$$

Außerdem genügen die Spherical Harmonics dem Additionstheorem

$$P_l(\theta\cdot\theta') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} \overline{Y}_{l,m}(\theta) Y_{l,m}(\theta')$$

mit dem Legendre-Polynom P_l vom Grad l. Es folgt sofort folgende Repräsentation der Funktion f:

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \int_{S^2} f(\theta') P_l(\theta\cdot\theta')\, d\theta'.$$

Für nähere Erläuterungen sei auf [1, 2] verwiesen.

Literatur

[1] David Colton and Rainer Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Applied Mathematical Sciences, vol. 93, Springer, Berlin, 1998.

[2] Z. X. Wang and D. R. Guo, *Special Functions*, World Scientific, Singapore, 1989.