



Mathematische Methoden in der Medizintechnik

Blatt 11

Aufgabe 45

Für $t \in \mathbb{R}$, $h > 0$ und $\kappa \in \{0, 1\}$ definieren wir die diskrete Faltung

$$Q_j(t) = h \sum_{l \in \mathbb{Z}} v(t - s_{l,j}) g(s_{l,j}, \vartheta_j)$$

mit $s_{l,j} = (\kappa + 1)h(l + \kappa j/2)$. Weiter sei

$$I_H u(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} u(iH) B_H(t - iH)$$

die lineare Interpolation zur Schrittweite $H > 0$. Zeigen Sie: Falls $H = (\kappa + 1)h/M$ mit $\kappa M/2 \in \mathbb{N}_0$ und $M \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$I_H Q_j(t) = h \sum_{l \in \mathbb{Z}} (I_H v)(t - s_{l,j}) g(s_{l,j}, \vartheta_j).$$

Aufgabe 46

Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \text{sinc}^2(x + \pi l) = 1$$

gilt.

Aufgabe 47

Der Fehlerterm E_3 aus Satz 7.2 besitzt die Darstellung

$$E_3(x) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v^{(3)}}(\sigma) e^{i\sigma x \cdot \omega_j} \phi(\sigma, \vartheta_j) d\sigma, \quad \omega_j = \omega(\vartheta_j),$$

mit den Funktionen

$$\widehat{v^{(3)}}(\sigma) = \text{sinc}^2(H\sigma/2) \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_H(\sigma - 2\pi l/H), \quad \widehat{v}_H(\sigma) = (1 - \chi_{[-b,b]}(\sigma)) \widehat{v}(\sigma),$$

und

$$\phi(\sigma, \vartheta) = h(\kappa + 1) \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathbf{R}f\left(\left(\kappa + 1\right)h\left(l + \kappa p \vartheta / (2\pi)\right), \vartheta\right) e^{-i\sigma\left(\left(\kappa + 1\right)h\left(l + \kappa p \vartheta / (2\pi)\right)\right)}.$$

Beweisen Sie die Abschätzung des Fehlers E_3 aus Satz 7.2, d.h.

$$\|E_3\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sqrt{8\pi}(2 + h)\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{|\sigma| > b} |\widehat{v}(\sigma)| d\sigma.$$

Anmerkung: In der ganzen Aufgabe haben wir zur Vereinfachung der Notation v für v_γ geschrieben.

Aufgabe 48

Sei e ein Mollifier und v der zugehörige Rekonstruktionskern. Weiter sei χ die charakteristische Funktion des Intervalls $[-2, 2]$. Weisen Sie nach, dass, falls $\text{supp } f \subset \Omega$ liegt,

$$\mathbf{R}^*(\chi v_\gamma * \mathbf{R}f)(x) = e_\gamma * f(x)$$

für $x \in \Omega$ gilt.

Diskussion der Lösungen

Die Aufgaben dieses Übungsblattes werden in der Übung am **Montag, den 13. Juli 2009**, diskutiert.