Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Karlsruhe Institute of Technology

Prof. Dr. A. Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann

Sommersemester 2009

Mathematische Methoden in der Medizintechnik

Blatt 12

Aufgabe 49

Sei $f \in C_0^\infty(\Omega)$, $g = \mathbf{R}f$ und $v \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$\frac{\pi}{p}\sum_{j=1}^{p}(v *_s g)(x \cdot \omega(\vartheta_j), \vartheta_j) = (V_p * f)(x) \quad \text{mit} \quad V_p(x) := \frac{\pi}{p}\sum_{j=1}^{p} v(x \cdot \omega(\vartheta_j)).$$

Aufgabe 50

Sei $\widetilde{\mathbf{R}}\colon f \mapsto \big(\mathbf{R}f(s_i, \vartheta_j)\big)_{i,j}$ mit $s_i = i/q$, $i = -q, \ldots, q$ und $\vartheta_j = j\pi/p$, $j = 0, \ldots, p-1$. Zeigen Sie, dass der Operator

$$\widetilde{\mathbf{R}}\colon H_0^{1/2+\kappa}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to \mathbb{R}^{(2q+1)p}$$

für alle $\kappa > 0$ unbeschränkt ist.

Aufgabe 51

Weisen Sie nach:

(a) Sei $v \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ radialsymmetrisch in dem Sinne, dass $v(s, \vartheta) = v(s, 0)$ für alle $s, \vartheta \in \mathbb{R}$. Ferner gelte $v(s, 0) = v(-s, \pi)$ und $v(\cdot, 0)$ habe kompakten Träger in $]-1, 1[$. Dann gilt

$$\mathbf{R}^* v(x) = 2\int_0^{\min\{1,|x|\}} \frac{v(s,0)}{\sqrt{|x|^2 - s^2}}\, ds.$$

(b) Verschwinden zusätzlich die Momente

$$\int_{-1}^{1} s^{2k} v(s, 0)\, ds = 0, \quad k = 0, \ldots, m,$$

dann folgt

$$|\mathbf{R}^* v(x)| = O(|x|^{-(2m+3)}) \quad \text{für} \quad |x| \to \infty.$$

Aufgabe 52

Sei $\eta \in L^2(-1,1)$. Mit S^2 bezeichnen wir die 2-dimensionale Einheitssphäre $\partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante c gibt mit

$$\int_{S^2} \theta \eta(\theta \cdot \theta')\, d\theta = c\theta'.$$

Hinweis: Benutzen Sie Darstellung von η durch die Legendre-Reihe

$$\eta(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l P_l(x)$$

sowie die folgende Darstellung des Einheitsvektors $\theta \in S^2$ durch Spherical Harmonics

$$\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\big(Y_{1,-1}(\theta) - Y_{1,1}(\theta)\big) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\big(Y_{1,-1}(\theta) + Y_{1,1}(\theta)\big) \\ Y_{1,0}(\theta) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 53

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Die konvexe Projektion $P_\mathcal{C}$ einer Funktion $q \in L^2(\Omega)$ auf eine abgeschlossene, konvexe Menge $\mathcal{C} \subset L^2(\Omega)$ ist definiert durch

$$P_\mathcal{C}(q) = \arg\min_{\gamma \in \mathcal{C}} \|\gamma - q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Sei weiter $\Omega_0 \subset \Omega$, $A \in \mathcal{L}\big(L^2(\Omega), L^2(\partial\Omega)\big)$ und $f \in L^2(\partial\Omega)$. Weisen Sie nach, dass

(a)
$$P_{\mathcal{C}_1}(q) = q^+ \chi_{\Omega_0}, \quad \mathcal{C}_1 = \{p \in L^2 \mid p \geq 0 \text{ f.ü. und } \operatorname{supp} p \subset \Omega_0\}$$

(b)
$$P_{\mathcal{C}_2}(q) = A^\dagger f + \Pi_{\mathcal{N}(A)} q, \quad \mathcal{C}_2 = \{p \in L^2 \mid A^* A p = A^* f\}$$

gilt, wobei wir die Notationen $q^+ = \max\{q, 0\}$ für den Positivteil von q, $A^\dagger$ für die verallgemeinerte Inverse von A sowie $\Pi_{\mathcal{N}(A)}$ für die orthogonale Projektion auf den Nullraum von A verwendet haben.

Diskussion der Lösungen

Die Aufgaben dieses Übungsblattes werden in der Übung am **Montag, den 20. Juli 2009,** diskutiert.