Definition 3: Sei $d, m \in \mathbb{N}$. Mit dem Symbol $\mathbb{R}^{d\times m}$ bezeichnet man die Menge aller Matrizen

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \cdots & a_{dm} \end{pmatrix}}_{m \text{ Spalten}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} d \text{ Zeilen}$$

mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ und den folgenden Operationen:

- Addition: Für $A, B \in \mathbb{R}^{d\times m}$ gilt

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \cdots & a_{dm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{d1} & \cdots & b_{dm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1}+b_{d1} & \cdots & a_{dm}+b_{dm} \end{pmatrix}$$

(Subtraktion analog)

- Multiplikation mit Skalar: Für $A \in \mathbb{R}^{d\times m}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$cA = c\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \cdots & a_{dm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{d1} & \cdots & ca_{dm} \end{pmatrix}$$

Beispiel: $d = 3$, $m = 2$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Man kann Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ als Matrix in $\mathbb{R}^{d\times 1}$ interpretieren. Umgekehrt kann man die Spalten einer Matrix als Vektoren interpretieren.

Definition 4: Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \cdots & a_{dm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times m}$$

eine Matrix. Dann ist die transponierte Matrix A^T definiert durch

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{d1} \\ \vdots & & \\ a_{1m} & \cdots & a_{dm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times d}$$

(Zeilen werden zu Spalten, Spalten werden zu Zeilen).

Spezialfall: Ist $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \mathrel{\hat{=}} \mathbb{R}^{d \times 1}$ ein Vektor („Spaltenvektor"), so ist $v^T = (v_1 \;\cdots\; v_d) \in \mathbb{R}^{1 \times d}$ der transponierte Vektor („Zeilenvektor"). Zur besseren Lesbarkeit trennt man die Einträge durch Kommata, d.h. $v^T = (v_1, \ldots, v_d)$.

1.2 Matrixmultiplikation

Definition 5: Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times m}$ eine Matrix und $v \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor. Dann ist das Matrix-Vektor-Produkt $w = Av$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \cdots & a_{dm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = v_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{d1} \end{pmatrix}}_{\text{erste Spalte von } A} + v_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{d2} \end{pmatrix}}_{\text{zweite Spalte von } A} + \ldots + v_d \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{dm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

Bemerkung: Das Resultat einer Matrix-Vektor-Multiplikation ist also ein Vektor, der jedoch eine andere „Länge" hat als der Ausgangsvektor, falls $d \neq m$.
Interpretation: Matrizen definieren Abbildungen zwischen Vektoren.

<u>Beispiel:</u> $d=3,\ m=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

~~Bemerkung:~~

<u>Definition 6:</u> Der k-te <u>kanonische Einheitsvektor</u> $e^{(k)} \in \mathbb{R}^d$ ist der Vektor

$$e^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{k-te Stelle}$$

Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^d$ gilt $v = v_1 e^{(1)} + v_2 e^{(2)} + \ldots + v_d e^{(d)}$.
Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times m}$ und $e^{(k)} \in \mathbb{R}^m$ ist
$Ae^k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{dk} \end{pmatrix}$ gerade die k-te Spalte von A.

19.4.2012

<u>Lemma 1:</u> Sei $w \in \mathbb{R}^d$ und $v \in \mathbb{R}^d$. Dann ist

$$w^T = (w_1, \ldots, w_d) \in \mathbb{R}^{1\times d}$$

eine Matrix in $\mathbb{R}^{1\times d}$, und das Matrix-Vektor-Produkt von w^T und v ist dasselbe wie das Skalarprodukt $\langle w, v\rangle = \langle v, w\rangle$:

$$w^T v = (w_1, \ldots, w_d)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = v_1(w_1) + \ldots + v_d(w_d) = \langle v, w\rangle. \quad \blacksquare$$

<u>Folgerung:</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times m}$, $v \in \mathbb{R}^m$, ~~$w \in \mathbb{R}$~~ $w = Av \in \mathbb{R}^d$.
Sei $(\alpha^{(k)})^T = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kd})$ die k-te Zeile von

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{km} \\ \vdots & & \\ a_{d1} & \cdots & a_{dm} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$w = Av = \begin{pmatrix} (a^{(1)})^T v \\ \vdots \\ (a^d)^T v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}, v\rangle \\ \vdots \\ \langle a^{(d)}, v\rangle \end{pmatrix}$$