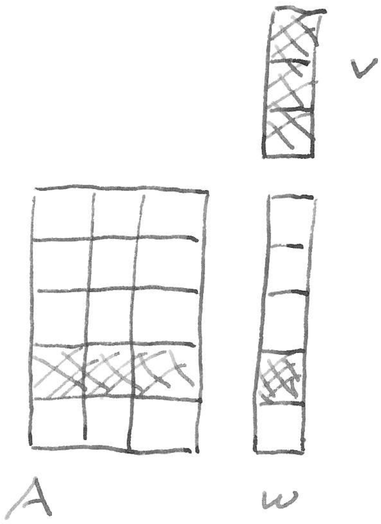
Als Merkhilfe kann man das folgende Schema verwenden:



$Av = w$

$A \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$, $v \in \mathbb{R}^3$, $w \in \mathbb{R}^5$

Eigenschaften des Matrix-Vektor-Produkts:

- Linearität: Für beliebige $A, B \in \mathbb{R}^{d \times m}$, $u, v \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$A(u+v) = Au + Av$$

$$(A+B)v = Av + Bv$$

$$c(Av) = (cA)v = A(cv)$$

- Vorsicht! Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt zwar $a \cdot b = b \cdot a$, aber für $A \in \mathbb{R}^{d \times m}$ und $v \in \mathbb{R}^m$ ist

$$Av \neq vA$$

Genauer: Für $m \geq 2$ und $d \geq 2$ ist der Ausdruck „vA" überhaupt nicht definiert!

Merke: Spaltenvektoren müssen rechts von der Matrix stehen.

Spezialfälle:

<u>Definition 7:</u> Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ (d.h. $d = n$) mit Einträgen a_{ij} und der Eigenschaft

$$a_{ij} = 0 \quad \text{falls} \quad i \neq j$$

heißt <u>Diagonalmatrix.</u> Eine Diagonalmatrix kann nur auf der Diagonalen von Null verschiedene Einträge haben, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{dd} \end{pmatrix}$$

Die spezielle Diagonalmatrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

heißt <u>Identität.</u>

Eigenschaften: Ist $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine Diagonalmatrix, so gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^d$:

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + v_d \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{dd} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 a_{11} \\ \vdots \\ v_d a_{dd} \end{pmatrix}$$

Ist $A = I$ die Identität, so ist $a_{11} = \ldots = a_{dd} = 1$, d.h. $Iv = v$ für alle $v \in \mathbb{R}^d$.

<u>Definition 8</u>: Das Produkt zweier Matrizen $A \in \mathbb{R}^{d \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Einträgen a_{ij} und b_{jk} und $d, m, n \in \mathbb{N}$ wird folgendermaßen definiert: Ist $C = AB \in \mathbb{R}^{d \times n}$ mit Einträgen c_{ik}, so ist die k-te Spalte von C ~~als~~ das Matrix-Vektor-Produkt von A mit der k-ten Spalte von B:

$$C = AB \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{dk} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix}$$

Beispiel: $d = 3, m = 2, n = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}}_{\text{1. Spalte von } C} = A \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{1. Spalte von } B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{14} \\ c_{24} \\ c_{34} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 3/2 & 6 \end{pmatrix}$$

Äquivalente Definition: Der Eintrag c_{ik} von C ist das Skalarprodukt der <u>i-ten Zeile</u> von A mit der <u>k-ten Spalte</u> von B.

Als Merkhilfe kann man das folgende Schema verwenden:

0	-1	1/2	0
1	4	-2	2

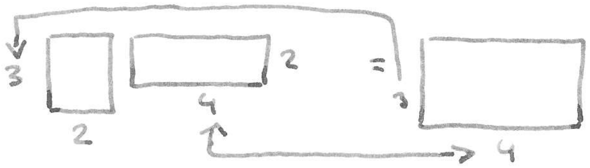
$B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$

0	1
8	2
15	3

$A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$C \in \mathbb{R}^{3\times 4}$

Durch das Matrixprodukt kann sich die „Größe" der Matrix ändern:



24.4.

Eigenschaften des Matrixprodukts:

- Linearität: Für $A, B \in \mathbb{R}^{d\times m}$ und $C, D \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt

$$A(C+D) = AC + AD \quad , \quad (A+B)C = AC + BC$$

- Keine Kommutativität: Für $d = m = n$ gilt im Allgemeinen

$$AB \neq BA \qquad \text{(bis auf Ausnahmen)}$$

Beispiel:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\neq$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für $d \neq n$ ist „BA" nicht einmal definiert.