Spezialfälle:

(i) Das Matrix-Vektor-Produkt von $A \in \mathbb{R}^{d\times m}$ und $v \in \mathbb{R}^{m} \hat{=} \mathbb{R}^{m\times 1}$ kann als Spezialfall des Matrixprodukts interpretiert werden.

(ii) Ist $I \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Identität, so gilt $IA = A$ für alle $A \in \mathbb{R}^{d\times m}$ und $BI = B$ für alle $B \in \mathbb{R}^{n\times d}$.

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Av = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} = -2v$$

Beobachtung: In diesem speziellen Fall ist das Ergebnis der Matrix-Vektor-Multiplikation dasselbe wie die Multiplikation von v mit der Zahl -2.

Frage: Gibt es für jeden Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ eine Zahl λ mit der Eigenschaft, dass $Av = \lambda v$ ist?

Antwort: Nein! Gegenbeispiel: Für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist $Av = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, und es gibt keine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

<u>Definition 8:</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine Matrix. Dann heißt $v \in \mathbb{R}^d$ <u>Eigenvektor</u> von A zum <u>Eigenwert</u> $\lambda \in \mathbb{R}$, falls

$$Av = \lambda v$$

gilt, und $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist (d.h. falls mindestens ein Eintrag von v von 0 verschieden ist).

Bemerkung: Eine Matrix $\mathbb{R}^{d\times m}$ mit $d \neq m$ kann keine Eigenwerte haben, da sich dann bei der Matrix-Vektor-Multiplikation die „Länge" des Vektors ändert (von m zu d).

Spezialfälle:

- Ist $A = I \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Identität, so gilt $Iv = v = 1\cdot v$ für alle $v \in \mathbb{R}^d$. Also ist jeder Vektor $v\neq 0$ ein Eigenvektor von I zum Eigenwert $\lambda = 1$.

- Ist $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Null-Matrix, so ist jeder Vektor $v\neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 0$.

- Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{dd} \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix, so gilt

$Ae^{(k)} = a_{kk} e^{(k)}$ für jedes $k \in \{1, \dots, d\}$. Also ist $e^{(k)}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = a_{kk}$.

<u>Lemma 2</u>: Wenn $v \in \mathbb{R}^d$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ und $c \neq 0$ eine reelle Zahl ist, so ist auch $w = cv$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

~~Eigenwerte sind~~ Eigenvektoren sind also nicht eindeutig, sondern nur bis auf ~~konstante Vielfache~~ Multiplikation mit $c \in \mathbb{R}$ bestimmt.

Beweis: Sei $v \neq 0$, $c \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
v \text{ Eigenvektor von } A \iff & Av = \lambda v \\
\iff & cAv = c\lambda v \\
\iff & A(cv) = \lambda(cv) \\
\iff & Aw = \lambda w.
\end{aligned}
$$

Eigenwerte und -vektoren spielen in verschiedenen Anwendungen eine wichtige Rolle. Leider ist es bei großen Matrizen meist schwierig bzw unmöglich, die Eigenwerte / -vektoren analytisch (d.h. mit Papier und Bleistift) zu bestimmen. Im Fall $d = 2$ gilt jedoch der folgende

<u>Satz 3</u>: Eine Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert von

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$p(x) = x^2 - (a_{11} + a_{22})x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

ist, d.h. wenn $p(\lambda) = 0$ ist.

(Beweis wird weggelassen.)

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = x^2 - (2-1)\,x + \big(2\cdot(-1) - 4\cdot 1\big) = x^2 - x \cancel{+} - 6$$

Nullstellen („Mitternachtsformel"):

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

(zwei Eigenwerte)

„Den" Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 3$ bestimmt man durch

$$Av = \lambda v \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2v_1 + v_2 \\ 4v_1 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff v_2 = v_1$$

Also sind z. B. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und nach Lemma 2 auch alle Vielfachen cv Eigenvektoren von A zum Eigenwert 3.

1.4 Taylor-Entwicklungen

Ziel: Möchte eine (eventuell komplizierte) Funktion lokal durch ein Polynom approximieren.

Notation: Die k-te Ableitung einer Funktion wird mit $\frac{d^k u}{dx^k}$ bezeichnet. Im Fall $k=1$ bzw. $k=2$ schreibt man auch $u'(x) = \frac{du}{dx}(x)$ bzw. $u''(x) = \frac{d^2u}{dx^2}$.