Satz 4 (Taylor-Entwicklung)

Sei (a,b) ein offenes Intervall, $s \in (a,b)$, $m \in \mathbb{N}$ und $u : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $(m+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion (d.h. man kann u $(m+1)$-mal ableiten und alle Ableitungen sind stetig). Dann gilt

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{d^k u}{dx^k}(s) \cdot \frac{(x-s)^k}{k!} + R_m(s,x)$$

$$= u(s) + u'(s)\frac{(x-s)}{1!} + u''(s)\frac{(x-s)^2}{2!} + \dots + \frac{d^m u}{dx^m}(s)\frac{(x-s)^m}{m!} + R_m(s,x).$$

Für jedes abgeschlossene Intervall $[\tilde{a},\tilde{b}] \subseteq (a,b)$ mit $s \in [\tilde{a},\tilde{b}]$ gibt es eine Konstante $C > 0$ derart, dass

$$|R_m(s,x)| \leq C \cdot |x-s|^{m+1}$$

gilt. Das bedeutet insbesondere, dass $\lim_{x \to s} |R_m(s,x)| = 0$.

3.5.

Interpretation: In der Nähe von s (d.h. falls $|x-s| < 1$ klein ist) wird $u(x)$ durch das Taylor-Polynom

$$T_m(x) = u(s) + u'(s)\frac{(x-s)}{1!} + u''(s)\frac{(x-s)^2}{2!} + \dots + \frac{d^m u}{dx^m}(s)\frac{(x-s)^m}{m!}$$

approximiert. Die Approximation ist umso genauer, je kleiner $|x-s|$ und je größer m ist.

Bemerkung: Man schreibt auch

$$u(x) = T_m(x) + O(|x-s|^{m+1})$$

„Ordnung $|x-s|^{m+1}$"

Beispiel:

$u(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$ Schaubild: Siehe Handout

$u'(x) = -(x+1)^{-2}$

$u''(x) = 2(x+1)^{-3}$

$u'''(x) = -6 \cdot (x+1)^{-4}$

Sei nun $s=0$:

$$\begin{aligned} T_3(x) &= u(0) + u'(0) \cdot \frac{(x-0)}{1!} + u''(0) \cdot \frac{(x-0)^2}{2!} + u'''(0) \frac{(x-0)^3}{3!} \\ &= 1 - 1 \cdot x + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 6 \cdot \frac{x^3}{3!} \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 \end{aligned}$$

Sei nun $s=1$:

$$\begin{aligned} T_3(x) &= u(1) + u'(1) \cdot \frac{(x-1)}{1!} + u''(1) \cdot \frac{(x-1)^2}{2!} + u'''(1) \cdot \frac{(x-1)^3}{3!} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-1) + 2 \cdot 2^{-3} \frac{(x-1)^2}{2} - 6 \cdot 2^{-4} \frac{(x-1)^3}{3!} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3 \end{aligned}$$