2. Modellierung mit gewöhnlichen Differentialgleichungen

2.1 Wachstum einer Population

Ziel: Finde eine Funktion $y(t)$, welche die Größe einer Population in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.

Beispiele: Weltbevölkerung, Bakterienkultur, ...

Modellierung: Sei $y(t+h)$ bzw. $y(t)$ die Populationsgröße an zwei Zeitpunkten $t+h > t \geq 0$ mit kleinem Abstand $h > 0$.
Annahme: Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$(1) \quad y(t+h) = y(t) + \underbrace{h \cdot c \cdot y(t) + h^2(\ldots)}_{\text{Wachstum im Zeitintervall } [t, t+h]}$$

Wie kommt man auf diese Formel?

Wachstum muss im Wesentlichen

- proportional zur Länge h des Zeitintervalls sein
- proportional zur aktuellen Größe $y(t)$ der Population sein
- proportional zu Lebensbedingungen sein ($\rightarrow$ Konstante c)

„Im Wesentlichen" heißt: Es können Terme der Form $h^2(\ldots)$ auftreten, die für kleine h jedoch ~~kein~~ kaum Einfluss haben.

(1) ist äquivalent zu

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = c \cdot y(t) + h(\ldots)$$

Betrachte nun den Grenzwert $h \rightarrow 0$:

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h}}_{=y'(t)} = \underbrace{\lim_{h\to 0}\left(c\cdot y(t) + h\cdot(\ldots)\right)}_{=c\cdot y(t)}$$

Wir erhalten also die gewöhnliche Differentialgleichung

(2) $$y'(t) = c\cdot y(t)$$

„Differentialgleichung": Gleichung, die eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung bzw. ihren Ableitungen ausdrückt. Gesucht ist eine Funktion, die die Gleichung erfüllt.

„gewöhnlich": Die Funktion hängt nur von einer Variablen ab. (im Gegensatz zu partiellen Differentialgleichungen).

Genauere Definition: später. Abkürzung: ODE = ordinary differential equation

Die ODE (2) hat unendlich viele Lösungen!

Genauer: Für jedes $\alpha\in\mathbb{R}$ ist

$$y(t) = \alpha e^{ct}$$

eine Lösung der ODE (2), denn es gilt

$$y'(t) = \alpha\cdot c\cdot e^{ct} = c\cdot y(t) \quad \checkmark$$

Um α eindeutig zu bestimmen und damit eine eindeutige Lösung zu erhalten, muss man den Wert von $y(t)$ an einer Stelle t kennen. Meist ist der Anfangswert $y_0 = y(0)$ bekannt. Dann gilt

$$y_0 = y(0) = \alpha \underbrace{e^{c\cdot 0}}_{=1} = \alpha$$