Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$(3)\quad\begin{cases} y'(t) = c\cdot y(t) & \text{für alle } t\geq 0 \qquad \text{(ODE)}\\ y(0) = y_0 & \qquad\qquad \text{(Anfangsbedingung)}\end{cases}$$

lautet also $y(t) = e^{tc}\cdot y_0$.

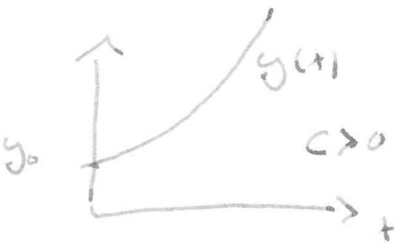
Bemerkung:

Falls $c>0$: Wachstum

$c<0$: „negatives Wachstum", Population nimmt ab

$c=0$: $y(t) = \underbrace{e^{t\cdot 0}}_{=1}\cdot y_0 = y_0 \Rightarrow$ Population bleibt konstant

$y_0 = 0$: $y(t) = 0$ für alle $t\geq 0$



8.5.

Das Anfangswertproblem (3) wurde ~~18~~ 1798 von T.R. Malthus als Modell für das Wachstum einer Population vorgeschlagen.

Ein (mathematisches) Modell ist ein System von Gleichungen, das in idealisierter Form ~~die~~ eine Gesetzmäßigkeit beschreibt. Solche Modelle sind nicht „wahr" oder „falsch", sondern beruhen auf rein heuristischen Überlegungen bzw. Vereinfachungen.

Vereinfachungen in unserem Beispiel:

- Obwohl z.B. die Anzahl der Menschen auf der Erde eine natürliche Zahl ist, die sich in Sprüngen verändert (Geburt: +1, Todesfall: −1), ist im Modell $y(t)\in\mathbb{R}$ und $y(t)$ ändert sich kontinuierlich.

Kontinuitätshypothese: Sehr große Populationen wachsen nahezu stetig, da häufig Änderungen auftreten und diese Änderungen relativ klein sind.

- Die Lebensbedingungen ändern sich nicht (d.h. c ist konstant)
- Geschlechter und Alter spielen keine Rolle
- Die Population kann unbegrenzt wachsen. Dies ist angesichts der begrenzten Ressourcen (Nahrung, Raum, Sauerstoff, ...) unrealistisch.

Verbessertes Modell: P.-F. Verhulst (1845)

Idee: Füge zur ODE (2) einen Term hinzu, der „soziale Reibungen" (Konkurrenz) beschreibt.

$$(4) \qquad y'(t) = c \cdot y(t) - d\, y^2(t) \qquad (c \in \mathbb{R},\ d \geq 0)$$

„logistische Differentialgleichung"

Interpretation: Wenn zwei Mitglieder der Population aufeinandertreffen, dann überlebt (mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit) nur einer. Der neue Term muss also negatives Vorzeichen haben (Wachstum $y'(t)$ wird kleiner) und proportional zu $y^2(t)$ sein (quadratisch, weil nicht die Anzahl der Menschen, sondern die Anzahl der Paare ausschlaggebend ist).

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = c \cdot y(t) - d \cdot y^2(t) & \text{für } t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

für gegebene Werte $y_0 \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$, $d \geq 0$ lautet

$$y(t) = \frac{c y_0}{d y_0 + (c - d y_0) e^{-ct}} \qquad \text{(Übungsaufgabe)}$$

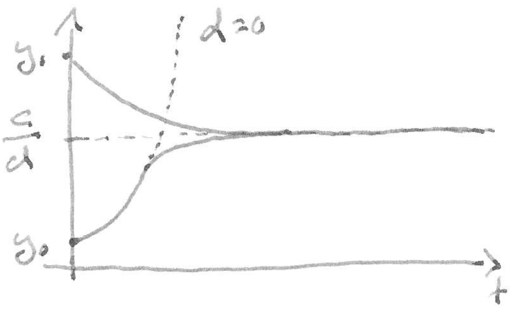
Es gilt $\lim_{t\to\infty} e^{-ct} = 0$ für $c>0$ und $e^{-ct} \to \infty$ für $t\to\infty$ und $c<0$.

Daraus ergibt sich das folgende Verhalten der Lösung:

Falls $c>0,\ d>0$: $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{c}{d}$

$c<0,\ d\geq 0$: $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

Anders als beim exponentiellen Wachstum konvergiert die Lösung also gegen eine feste Zahl. Dieses Verhalten nennt man logistisches Wachstum.



Anwendung: Entwicklung der Weltbevölkerung (siehe Handout)

Daten: United Nations, Department of Economics and Social Affairs

2.2 Räuber-Beute-Modelle

Betrachte nun zwei ~~[illegible]~~ Arten von Lebewesen, die miteinander interagieren:

$y_1(t)$ = Anzahl der Räubertiere

$y_2(t)$ = Anzahl der Beutetiere

Annahmen:

(1) Falls keine Räuber vorhanden sind, entwickelt sich die Population der Beutetiere nach dem Verhulst-Modell mit Parametern $c_2 \geq 0$, $d_2 \geq 0$.

(2) Falls keine Beute vorhanden ist, entwickelt sich die Population der Räuber nach dem Verhulst-Modell mit Parametern $c_1 \leq 0$, $d_1 \geq 0$. Da $c_1 \leq 0$ ist sterben die Räuber ohne Beute aus.

(3) Wenn viel Beute und viele Räuber vorhanden sind, sinkt die Anzahl der Beutetiere umso schneller.

(4) Wenn viel Beute und viele Räuber vorhanden sind, steigt die Anzahl der Räuber umso schneller.

Für $t \geq 0$ und ~~kleine~~ kleines $h > 0$ gilt also

Räuber: $$y_1(t+h) = \underbrace{y_1(t) + h c_1 y_1(t) - h d_1 y_1^2(t)}_{(2)} + \underbrace{h \cdot a \cdot y_1(t) y_2(t)}_{(4)} + h^2(\dots)$$

Beute: $$y_2(t+h) = \underbrace{y_2(t) + h c_2 y_2(t) - h d_2 y_2^2(t)}_{(1)} - \underbrace{h \cdot b\, y_1(t) y_2(t)}_{(3)} + h^2(\dots)$$

mit Parametern $a, b \geq 0$.

Subtrahiere $y_1(t)$ bzw. $y_2(t)$, teile durch h, betrachte Limes $h \to 0$ und erhalte ein gekoppeltes System von ODEs:

$$y_1'(t) = c_1 y_1(t) - d_1 y_1^2(t) + a\, y_1(t) y_2(t)$$

$$y_2'(t) = c_2 y_2(t) - d_2 y_2^2(t) - b\, y_1(t) y_2(t)$$

A. J. Lotka (1925), V. Volterra (1926), dort $d_1 = d_2 = 0$.

~~Für dieses System ist keine Lösungsformel bekannt. Die Lösung~~

Die Lösung ist nun ein Vektor $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, der sich abhängig von der Zeit verändert, d.h. eine vektorwertige Funktion $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$.