Für dieses System ist keine Lösungsformel bekannt. Die Lösung y(t) kann jedoch durch numerische Verfahren approximiert werden (→ später).

Beobachtung (siehe Handout):

- Für $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$ konvergiert die Lösung gegen einen stationären Punkt („steady state", „Ruhelage"). „Gleichgewichtspunkt"
- Für $d_1 = d_2$ ist die Lösung periodisch.
- Für $a = b = 0$ ist das System entkoppelt, d.h. Räuber und Beute beeinflussen sich nicht gegenseitig.

Auch dieses Modell beruht auf Annahmen bzw. Vereinfachungen:

- Kontinuumshypothese
- Konstante Lebensbedingungen
- Alter und Geschlecht spielen keine Rolle

} siehe 2.1

- Räumliche Aspekte spielen keine Rolle. Das System ist „gut durchmischt", d.h. die Räuber- bzw. Beutetiere sind gleichmäßig über den Raum verteilt.

Das Modell kann um weitere Arten erweitert werden. So können komplizierte Ökosysteme bzw. Nahrungsketten modelliert werden.

Um die Lösung in eindeutiger Weise festzulegen muss der Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$ bekannt sein.

2.3 Ausbreitung von ansteckenden Krankheiten

Betrachte eine Gruppe von Menschen (oder Tieren), von denen einige unter einer ansteckenden Krankheit leiden. Bei Kontakt werden die Gesunden mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit von den Infizierten angesteckt.

Sei $y_1(t)$ Anzahl der Gesunden zur Zeit t

Sei $y_2(t)$ Anzahl der Infizierten zur Zeit t

Vereinfachungen wie in 2.2 (Kontinuumshypothese usw.)

Herleitung von ODEs für $y_1(t)$ und $y_2(t)$:

Durch ähnliche Überlegung wie in 2.2 erhält man für kleines $h>0$

$$y_1(t+h) = y_1(t) - h\cdot c\cdot y_1(t)\,y_2(t) + h^2\cdot(\dots)$$
$$y_2(t+h) = y_2(t) + h\cdot c\cdot y_1(t)\,y_2(t) + h^2(\dots)$$

Interpretation: Die Anzahl der im Zeitintervall $[t, t+h]$ neu angesteckten Menschen ist (bis auf Terme höherer Ordnung) proportional zu h, $y_1(t)$ und $y_2(t)$.

Forme um:

$$\frac{y_1(t+h) - y_1(t)}{h} = -c\cdot y_1(t)\,y_2(t) + h\cdot(\dots)$$

$$\frac{y_2(t+h) - y_2(t)}{h} = c\cdot y_1(t)\,y_2(t) + h\cdot(\dots)$$

Im Limes $h \to 0$ gilt also ~~die~~

$$y_1'(t) = -c \cdot y_1(t)\, y_2(t)$$

$$y_2'(t) = c \cdot y_1(t)\, y_2(t)$$

Bemerkung: Ähnliche Terme traten im Räuber-Beute-Modell auch auf.

Erweiterungen des Basismodells:

1. Nach der Infektion sind die Menschen nicht sofort ansteckend, sondern durchlaufen eine latente Phase. Die Anzahl der ansteckenden Menschen wächst proportional zur Anzahl der Menschen in der latenten Phase ($= y_3(t)$).

   Man erhält ähnlich wie oben das neue Modell

$$y_1'(t) = -c_1 y_1(t)\, y_2(t)$$

$$y_2'(t) = c_2 y_3(t)$$

$$y_3'(t) = c_1 y_1(t)\, y_2(t) - c_2 y_3(t)$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \geq 0$.

2. Durch Impfung können die Menschen immunisiert werden. Ist $y_4(t)$ die Anzahl der immunisierten Menschen, so erhält man

$$y_1'(t) = -c_1 y_1(t)\, y_2(t) - c_3 y_1(t)$$

$$y_2'(t) = c_2 y_3(t)$$

$$y_3'(t) = c_1 y_1(t)\, y_2(t) - c_2 y_3(t)$$

$$y_4'(t) = c_3 y_1(t)$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \geq 0$.

3. Weitere Phänomene, die man modellieren könnte:

- Menschen, die die Krankheit überstanden haben, sind ebenfalls immun.
- Bei manchen Menschen führt die Krankheit zum Tod
- Bei Endemien: Geburten, natürliche Todesfälle, soziale Reibung (wie in 2.1 bzw. 2.2).

Bemerkung: Verschiedene Varianten des Infektionsmodells werden durch eine Kombination der Buchstaben M, S, E, I, R bezeichnet.

M $\longleftrightarrow$ Kinder mit passiver Immunität durch Antikörper der Mutter („Maternally derived immunity")

S $\longleftrightarrow$ ~~[illegible]~~ gesunde, nicht immune Menschen („susceptible")

E $\longleftrightarrow$ angesteckte, aber noch nicht ansteckende Menschen („exposed")

I $\longleftrightarrow$ ansteckende Menschen („infectious")

R $\longleftrightarrow$ immune ~~oder~~ Menschen bzw. Tote („removed", „recovered")

z.B. SIR-Modell: $S \longrightarrow I \longrightarrow R$

MSEIRS-Modell:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] & S \arrow[r] & E \arrow[r] & I \arrow[r] & R \arrow[llll, phantom] \arrow[lll, bend left, to path={-- ([yshift=-4ex]\tikztostart.south) -| (\tikztotarget)}] \end{tikzcd}$$