3. Eigenschaften gewöhnlicher Differentialgleichungen

3.1 Lösungen von Anfangswertproblemen

Definition 1: Eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung (ODE = ordinary differential equation) erster Ordnung hat die Form

$$y'(t) = f(y(t)) \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{matrix} y_1'(t) & = & f_1(y(t)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_d'(t) & = & f_d(y(t)) \end{matrix}$$

Dabei ist $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_d(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ ein zeitabhängiger Vektor und $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor, dessen Einträge von einem Vektor $x \in \mathbb{R}^d$ abhängen.

- „autonom" heißt: $f(x)$ hängt nur von x, aber nicht direkt von t ab
- „erster Ordnung" heißt: in der ODE tritt nur $y'(t)$, aber nicht $y''(t)$ oder höhere Ableitungen auf.

Beispiel:

Sei $d = 2$, $f(x) = \begin{pmatrix} -c x_1 x_2 \\ c x_1 x_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c\, y_1(t)\, y_2(t) \\ c\, y_1(t)\, y_2(t) \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{matrix} y_1'(t) = -c\, y_1(t)\, y_2(t) \\ y_2'(t) = c\, y_1(t)\, y_2(t) \end{matrix}$$

(vgl. 2.3)

Definition 2: Ein Anfangswertproblem (AWP) hat die Form

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \text{für alle } t \in (t_0, t_{end}) \qquad \text{ODE}$$

$$y(t_0) = y_0 \qquad \text{Anfangsbedingung}$$

Dabei ~~ist~~ sind $t_0 < t_{end}$ Anfangs- und Endzeitpunkt und $y_0 \in \mathbb{R}^d$ der vorgegebene Anfangswert („Anfangsvektor") zum Startzeitpunkt.

Eine Funktion $y(t)$ heißt Lösung des AWP, falls $y(t_0) = y_0$ gilt, $y(t)$ differenzierbar ist und die ODE für alle $t \in (t_0, t_{end})$ erfüllt ist.

Wir wissen aus Kap. 2, dass eine ODE beliebig viele Lösungen haben kann, und dass Eindeutigkeit der Lösung meist erst durch die Anfangsbedingung erreicht wird.

Frage: Hat jedes AWP eine eindeutige Lösung?

Antwort: Nein!

Gegenbeispiel: Das AWP

$$y'(t) = -\frac{\sqrt{1-y(t)}}{y(t)} \quad \text{für alle } t \in (0,1)$$

$$y(0) = 1$$

(d.h. $d=1$, $f(x) = -\frac{\sqrt{1-x}}{x}$) hat mindestens zwei Lösungen, nämlich $y(t) = 1$ (konstant) und $y(t) = \sqrt{1-t^2}$ (nachrechnen!)

Es gilt jedoch der folgende

31.5.2012

Satz 1:

Sei $d=1$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion (d.h. $f'(x)$ existiert und ist stetig). Die Ableitung sei beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante $C>0$ derart, dass

$$|f'(x)| \leq C \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann hat das AWP

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \text{für alle } t \in (t_0, t_{end})$$
$$y(t_0) = y_0$$

für beliebige $y_0 \in \mathbb{R}$ und $t_0 < t_{end}$ eine eindeutige Lösung.

Bemerkung:

Leider kann dieser Satz nicht direkt auf die GDEs aus Kap. 2 angewandt werden, weil dort meist $d>1$ gilt und die Voraussetzung $|f'(x)| \leq C$ nicht erfüllt ist. Man kann den Satz jedoch so weit verallgemeinern, dass dadurch die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für allgemeine Reaktionssysteme garantiert wird.

Annahme:

Von nun an setzen wir bei allen AWPs voraus, dass die Lösung existiert und eindeutig ist.

3.2 Lineare ODEs

Definition 3: Eine ODE heißt linear, falls $f(y) = Ay + b$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^d$ gilt. Die ODE heißt homogen, falls $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Satz 2: Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Die Lösung des AWP

$$\begin{aligned} y'(t) &= A\, y(t) \quad \text{für } t \in (0, \infty) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

lautet

$$y(t) = e^{tA}\, y_0 .$$

Dabei ist die Exponentialfunktion einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ durch die Exponentialreihe

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots$$

definiert, wobei $M^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, $M^1 = M$ und

für $k \geq 1$ $\quad M^k = \underbrace{M M \dots M}_{k\text{-mal}}$ (Matrixmultiplikation, siehe 1.2)

Für $M = tA$ erhält man also

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots$$

Bemerkung: Für $d = 1$, $M = c \in \mathbb{R}$ erhält man die ODE bzw. Lösung aus 2.1:

$$\begin{aligned} y'(t) &= c\,y(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad y(t) = e^{ct} y_0$$

Satz 2 liefert eine Verallgemeinerung davon.

Beispiele ($d = 2$):

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ für $k \geq 2$

$$\Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(konstant)}$$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ für $k \geq 2$

$$\Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (Diagonalmatrix)

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}, \quad A^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(3t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{(5t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Für allgemeine Matrizen $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ kann man die Exponentialreihe nicht von Hand berechnen, da die Reihe nicht abbricht. ~~Kka~~

Was passiert, wenn y_0 ein Eigenvektor von A ist?

Sei $Ay_0 = \lambda y_0$ mit Eigenwert λ_0 und $y_0 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dann gilt

$$A^2 y_0 = AAy_0 = A(\lambda y_0) = \lambda A y_0 = \lambda(\lambda y_0) = \lambda^2 y_0 .$$

und entsprechend

$$A^k y_0 = \lambda^k y_0 .$$

Also gilt dann

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrix}}}{e^{tA}} y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{A^k y_0}_{\lambda^k y_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} y_0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zahl}}}{e^{\lambda t}} y_0$$

Verallgemeinerung:

<u>Satz 3:</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine Matrix und $m \in \mathbb{N}$. Für $j = 1, \dots, m$ $(m \in \mathbb{N})$ sei v_j ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j, d.h.

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 , \quad Av_2 = \lambda_2 v_2 , \quad \dots , \quad Av_m = \lambda_m v_m .$$

Weiter seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$y_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m .$$

Dann gilt

$$e^{tA} y_0 = \alpha_1 e^{t\lambda_1} v_1 + \alpha_2 e^{t\lambda_2} v_2 + \dots + \alpha_m e^{t\lambda_m} v_m .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} e^{tA} y_0 &= e^{tA} (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) \\ &= \alpha_1 e^{tA} v_1 + \dots + \alpha_m e^{tA} v_m \\ &= \alpha_1 e^{t\lambda_1} v_1 + \dots + \alpha_m e^{t\lambda_m} v_m . \end{aligned}$$

$\blacksquare$