Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$

Bestimme die Eigenwerte (vgl. Satz 3 aus 1.3). Charakteristisches Polynom:

$$p(x) = x^2 - (8-7)x + (8\cdot(-7) - 10\cdot(-5))$$
$$= x^2 - x \cancel{} - \cancel{} 6$$

~~Kfo~~ Eigenwerte sind Nullstellen von $p(x)$. Mitternachtsformel

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 = \lambda_1 \\ -2 = \lambda_2 \end{cases}$$

~~Eigenwerte~~ Eigenvektoren: $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2$$

Sei $y_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\cdot v_1 - v_2$, d.h. $d_1 = 2$, $d_2 = -1$

Dann lautet die Lösung des AWP

$$y'(t) = Ay(t), \quad t \in (0,\infty)$$
$$y(0) = y_0$$

$$y(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + d_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$
$$= 2e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.6.2012

Bemerkung: Das Vorzeichen des Eigenwerts λ_k entscheidet, ob der „Beitrag" von v_k zur Lösung für wachsendes t größer oder kleiner wird:

Falls $\lambda_k < 0 \Rightarrow e^{\lambda_k t} \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$

Falls $\lambda_k = 0 \Rightarrow e^{\lambda_k t} = 1$ für alle t

Falls $\lambda_k > 0 \Rightarrow e^{\lambda_k t} \longrightarrow \infty$ für $t \longrightarrow \infty$

3.3 Phasendiagramm und stationäre Punkte

Phasendiagramm: siehe Folien

Definition 4: Ein Vektor $s \in \mathbb{R}^d$ heißt stationärer Punkt (oder „steady state", „Ruhelage", „Gleichgewichtspunkt") der ODE

$$y'(t) = f(y(t)) \qquad , \qquad y(t) \in \mathbb{R}^d$$

genau dann, wenn

$$f(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt.

Falls $y_0 = s$ ein stationärer Punkt ist, so ist die Lösung des AWP

$$y'(t) = f(y(t)) \qquad \text{für } t \in (0, \infty)$$
$$y(0) = y_0$$

die konstante Funktion

$$y(t) = y_0 = s \qquad \text{für alle } t \in [0, \infty)$$

Beweis: $y(t) = s$ erfüllt die Anfangsbedingung, und da $y(t) = s$ nicht von t abhängt, gilt

$$y'(t) = 0 = f(s) = f(y(t)) .$$

■

Beispiele:

- Wachstum einer Population nach Verhulst (vgl. 2.1):
  Hier ist $d = 1$, $f(x) = cx - bx^2 = x(c - bx)$ ($c, b > 0$ Konstanten)
  und die ODE

$$y'(t) = f(y(t)) \cancel{= c\,y(t) - d\,y^2(t) = y(t)(c - d\,y(t))}$$

hat die stationären Punkte

$$s = 0 \quad \text{und} \quad s = \frac{c}{b}$$

- Räuber-Beute-Modell (vgl. 2.2):
  Sei $d = 2$ und

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_1^2 + x_1 x_2 \\ 5x_2 - 2x_2^2 - x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

(Spezialfall von (2.2) mit $c_1 = 2$, $d_1 = 1$, $a = 1$, $c_2 = 5$, $d_2 = 2$, $b = 1$)

Bestimme die stationären Punkte der ODE $y'(t) = f(y(t))$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{ll} 2x_1 - x_1^2 + x_1 x_2 = x_1(2 - x_1 + x_2) = 0 & (1) \\ 5x_2 - 2x_2^2 - x_1 x_2 = x_2(5 - 2x_2 - x_1) = 0 & (2) \end{array}$$

<u>Fall 1:</u> $x_1 = 0$

(2) ist erfüllt, falls $x_2 = 0$ oder $5 - 2x_2 - \underbrace{x_1}_{=0} = 0$,
d.h. $x_2 = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}$

<u>Fall 2:</u> $x_2 = 0$

(1) ist erfüllt, falls $x_1 = 0$ oder $2 - x_1 + \underbrace{x_2}_{=0} = 0$,
d.h. $x_1 = 2$

$\Rightarrow s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $s = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fall 3: $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$

Dann muss gelten

$$2 - x_1 + x_2 = 0 \qquad (3)$$
$$5 - 2x_2 - x_1 = 0 \qquad (4)$$

Aus (3) folgt $x_2 = x_1 - 2$

Einsetzen in (4) ergibt

$$5 - 2(x_1 - 2) - x_1 = 0$$
$$\Longleftrightarrow 9 - 3x_1 = 0$$
$$\Longleftrightarrow x_1 = 3$$

Also $s = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Frage: Was passiert, wenn nicht $y_0 = s$, sondern nur $y_0 \approx s$ gilt, d.h. wenn der Anfangswert des AWP

$$y'(t) = f(y(t))$$
$$y(0) = y_0$$

in der Nähe eines stationären Punkts liegt?

In manchen Fällen konvergiert dann $y(t)$ gegen s, aber nicht immer. Warum?

Betrachte zunächst lineare AWPs:

$$y'(t) = Ay(t) + b = f(y(t))$$
$$y(0) = y_0 \approx s$$

(s stationärer Punkt, d.h. $0 = f(s) = As + b$).

Definiere jetzt eine neue Funktion: Sei $u(t) = y(t) - s$

Leite beide Seiten ab und setze die ODE ein:

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= y'(t) - s' \\
&= y'(t) && (s' = 0 \text{, da } s \text{ unabhängig von } t) \\
&= Ay(t) + b && (\text{ODE einsetzen}) \\
&= Ay(t) + b - \underbrace{(As + b)}_{=0} && (\text{da } s \text{ stat. Punkt}) \\
&= A(y(t) - s) \\
&= Au(t) && (\text{nach Definition von } u(t))
\end{aligned}
$$

Anfangswert: $u(0) = y(0) - s = y_0 - s$

Lösung: $u(t) = e^{tA} u(0)$

Wende nun Satz 3 an:

Sei $v_j \in \mathbb{R}^d$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_j \in \mathbb{R}$, d.h.

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2, \ \dots$$

Sei $d_1, d_2, \dots, d_m$ derart, dass

$$u(0) = d_1 v_1 + \dots + d_m v_m$$

Dann gilt

$$u(t) = e^{tA} u(0) = d_1 e^{t\lambda_1} v_1 + \dots + d_m e^{t\lambda_m} v_m$$

Wenn $\lambda_j < 0$ für alle $j = 1, \dots, m$, so gilt

$$e^{t\lambda_j} \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \longrightarrow \infty$$

$$\Longrightarrow u(t) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } t \longrightarrow \infty$$

$$\Longrightarrow y(t) \longrightarrow s \quad \text{für } t \longrightarrow \infty$$

Fazit: Wenn alle Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ~~echt~~ kleiner als Null sind, so konvergiert die Lösung des AWPs gegen s.