95

Fazit:

1. Wenn alle Eigenwerte λ_i von A echt kleiner als Null sind ($\lambda_j < 0$ für alle j), so konvergiert die Lösung $u(t)$ für jeden beliebigen Anfangswert u_0 gegen 0, und $y(t)$ konvergiert dann gegen s.

2. Wenn für einen (oder mehrere) Eigenwerte $\lambda_i \geq 0$ gilt, so konvergiert die Lösung $u(t)$ nur dann gegen 0, wenn der entsprechende Koeffizient $\alpha_i = 0$ ist. Ist $\alpha_i \neq 0$ und $\lambda_i > 0$, so ~~gilt u(t) → ± ∞ für~~ wächst $\|u(t)\| = \|y(t) - s\|$ für wachsendes t, d.h. $y(t)$ entfernt sich von s.

96

Beispiele:

1. $f(x) = Ax + b$ mit $A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 6 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Bestimme die stationären Punkte der ODE

$$y'(t) = f(y(t)) = Ay(t) + b$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 6 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{aligned} -\tfrac{7}{2}x_1 + 6x_2 - 3/2 &= 0 \qquad (1) \\ -x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Aus (2) folgt: $\underline{x_1 = \frac{3}{2}x_2}$

37

Einsetzen in (1):

$$-\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}x_2\right) + 6x_2 - \frac{3}{2} = 0 \qquad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow \quad -7\cdot 3x_2 + 4\cdot 6x_2 - 2\cdot 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -21x_2 + 24x_2 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x_2 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{x_2 = 2} \qquad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3}{2}\cdot\{2\} = 3$$

Stationärer Punkt: $s = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bestimme Eigenwerte von A: Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \left(-\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right)\lambda + \left(-\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2} - (-7)\cdot 6\right)$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + \frac{3}{4}$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot\frac{3}{4}}}{2} = \frac{-2 \pm 1}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Beide Eigenwerte sind negativ. Die ~~Folge~~ Lösung $y(t)$ konvergiert also für alle Anfangswerte gegen $s = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

38

2. $f(x) = Ax + b$ mit $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Stationärer Punkt:

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} -4x_1 + 6x_2 + 5 &= 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\ldots \Rightarrow \quad s = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von A:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (-4+5)\lambda + (-4\cdot 5 - (-3)\cdot 6)$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Ein Eigenwert ist positiv $\Rightarrow$ ~~nicht alle Lösungen kon~~

Die Lösung $y(t)$ konvergiert nicht für alle Startwerte gegen s.

Betrachte nun wieder eine allgemeine (d.h. nichtlineare) ODE:

$$y'(t) = f(y(t))$$

Sei $s \in \mathbb{R}^d$ ein stationärer Punkt, d.h. $f(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ziel: Untersuche das Verhalten von Lösungen in der Nähe von s.

Idee: Approximiere die Funktion $f(x)$ lokal (d.h. in der Nähe von s) durch eine <u>lineare</u> Funktion.

Betrachte zuerst den Fall $d = 1$, d.h. $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um die Stelle $s \in \mathbb{R}$ (vgl. Kap. 1, Satz 4):

$$f(x) = \underbrace{f(s)}_{=0} + f'(s) \cdot (x-s) + \underbrace{f''(s)\frac{(x-s)^2}{2!} + f'''(s)\frac{(x-s)^3}{3!} + \ldots}_{= R_1(s,x)}$$

Für $x \approx s$ ist das Restglied $R_1(s,x)$ klein.

$\Rightarrow$ Lasse $R_1(s,x)$ weg und approximiere

$$f(x) \approx f'(s) \cdot (x-s)$$

Betrachte jetzt die Funktion $u(t) = y(t) - s$

$$\begin{aligned} u'(t) &= y'(t) - \underbrace{s'}_{=0} \\ &= f(y(t)) \\ &\approx f'(s) \cdot (y(t) - s) \\ &= f'(s) \cdot u(t) \end{aligned}$$

Wenn man „$\approx$" durch „$=$" ersetzt, erhält man die <u>lineare</u> ODE

$$\tilde{u}'(t) = f'(s)\tilde{u}(t) \qquad (f'(s) \in \mathbb{R} \text{ ist konstant})$$

~~Für $x \approx s$ gilt $\tilde{u}(t) \approx u(t)$~~

Für $y(t) \approx s$ bzw. $u(t) \approx 0$ ist $\tilde{u}(t) \approx u(t) = y(t) - s$

Die lineare ODE

$$\tilde{u}'(t) = f'(s)\,\tilde{u}(t)$$

beschreibt also näherungsweise das Verhalten der nichtlinearen ODE

$$y'(t) = f(y(t))$$

in der Nähe von s. Man kann beweisen, dass diese Approximationen „mathematisch Sinn machen".

Neues Ziel: Übertrage diese Strategie auf den Fall $d > 1$.

Problem: Nun sind $s \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $f(x) \in \mathbb{R}^d$ Vektoren

Was ist die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

<u>Definition 5</u>: Sei $j, k \in \{1, \dots, d\}$. Die <u>partielle Ableitung</u> von $f_j(x)$ nach x_k ist die Funktion, die man erhält, wenn man die Variablen $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d$ als Konstanten betrachtet und $f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_d)$ nur „nach x_k" ableitet.

Notation: $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)$

Beispiel ($d = 2$):

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot \sin(x_2) + 5x_2 \\ x_1^2 - 3x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = \sin(x_2), \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) = x_1 \cdot \cos(x_2) + 5$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) = 2x_1 - 3x_2, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) = -3x_1$$