Definition 6: Die Ableitung einer Funktion

$$f: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_d) \\ \vdots \\ f_d(x_1, \dots, x_d) \end{pmatrix}$$

an der Stelle x ist die Jacobi-Matrix

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(x) & \dots & & \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

(Matrixwertige Funktion, d.h. $J_f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$)

Beispiel:

Sei $d = 2$ und

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_1^2 + x_1 x_2 \\ 5x_2 - 2x_2^2 - x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

(Räuber-Beute-Modell)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = 2 - 2x_1 + x_2 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) = x_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) = -x_2 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) = 5 - 4x_2 - x_1$$

~~Auswertung an verschiedenen Stellen:~~

~~z.B.~~ $\cancel{J_f(x)}$

$$\Longrightarrow J_f(x) = \begin{pmatrix} 2 - 2x_1 + x_2 & x_1 \\ -x_2 & 5 - 4x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

Auswertungen an verschiedenen Punkten:

z.B. $J_f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2-2-0 & 1 \\ -0 & 5-4\cdot 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$J_f\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2-4-1 & 2 \\ -(-1) & 5-4\cdot(-1)-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Sei nun $s \in \mathbb{R}^d$ ein stationärer Punkt, d.h. $f(s) = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.

Dann gilt für $y(t) \approx s$

$$f(y(t)) \approx \underbrace{f(s)}_{=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}} + J_f(s)\,(y(t)-s)$$

bzw. für $u(t) = y(t) - s$

$$u'(t) \approx J_f(s)\,u(t) \qquad \text{(lineare ODE)}$$

Definition 7: Die lineare ODE

$$\tilde{u}'(t) = J_f(s)\,\tilde{u}(t)$$

heißt die um den Punkt s linearisierte ODE.

Wir nehmen an, dass alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ von $J_f(s)$ reelle Zahlen sind (siehe Bemerkung am Ende des Kapitels).

Dann heißt $s \in \mathbb{R}$

(i) asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte negativ sind, d.h. $\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$

(ii) instabil, falls es mindestens einen positiven Eigenwert $\lambda_i > 0$ gibt.

Im Fall (i) konvergiert die Lösung des AWP

$$y'(t) = f(y(t))$$
$$y(0) = y_0$$

gegen s, falls y_0 „nahe genug" bei s liegt. Im Fall (ii) gibt es Lösungen $y(t)$, die sich von s entfernen, obwohl $y_0 \approx s$ gilt. Falls $\lambda_i > 0$ für <u>alle</u> Eigenwerte gilt, laufen alle Lösungen mit $y_0 \approx s$ von s weg.

Um das qualitative Verhalten von Lösungen in der Nähe eines stationären Punkts zu analysieren muss man also

- die Jacobi-Matrix $J_f(x)$ bestimmen,
- $x = s$ einsetzen, d.h. $J_f(s)$ berechnen, und
- die Eigenwerte von $J_f(s)$ bestimmen.

Beispiel: Zurück zum Räuber-Beute-Modell

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_1^2 + x_1 x_2 \\ 5x_2 - 2x_2^2 - x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Untersuche die Stabilität der stationären Punkte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix lautet (siehe oben)

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 2 - 2x_1 + x_2 & x_1 \\ -x_2 & 5 - 4x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

- $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (Diagonalmatrix!)

  Eigenwerte: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, beide positiv $\Rightarrow$ s instabil
  Alle Lösungen laufen von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ weg.

- $s = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(s) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

  $p(\lambda) = \lambda^2 - (-2+3)\lambda + (-2)\cdot 3 - 0\cdot 2 = \lambda^2 - \lambda - 6$

  $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \end{Bmatrix}$

  Ein positiver Eigenwert $\Rightarrow$ instabil

- Analog: $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ ist instabil.

- $s = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(s) = \begin{pmatrix} 2-6+1 & 3 \\ -1 & 5-4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

  $p(\lambda) = \lambda^2 - (-3-2)\lambda + (-3\cdot(-2) + (-1)\cdot 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 3$

  $\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 3}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

  Wegen $\sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$ sind beide Eigenwerte negativ

  $\Rightarrow$ s ist asymptotisch stabil.

Bemerkung: Nicht alle Matrizen haben reelle Eigenwerte

Beispiel: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

Es gibt keine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $p(\lambda) = 0$.
Es gibt jedoch sogenannte <u>komplexe Zahlen</u>, die $p(\lambda) = 0$ erfüllen. Man kann dann die obige Analyse entsprechend verallgemeinern.

3.4 Positivität von Lösungen

Frage: Kann die Lösung eines AWP negativ werden, obwohl alle Einträge des Anfangswerts y_0 positiv sind?

Antwort: Ja. Die Lösung des AWP

$$y'(t) = -y(t) - 1$$
$$y(0) = 1$$

lautet $y(t) = 2e^{-t} - 1$ (nachrechnen!) und es gilt

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = -1 < 0$$

Negative Lösungen würden in vielen biologischen Anwendungen (Räuber-Beute, Infektionskrankheiten usw.) keinen Sinn machen. Die entsprechenden

ODEs haben hier jedoch eine bestimmte Struktur, die dafür sorgt, dass die Lösung bei positivem Anfangswert positiv bleibt.

Beispiel: Räuber-Beute

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 2y_1(t) - y_1^2(t) + y_1(t)\,y_2(t) \\ 5y_2(t) - 2y_2^2(t) - y_1(t)\,y_2(t) \end{pmatrix}$$

bzw. äquivalent

$$y_1'(t) = 2y_1(t) - y_1^2(t) + y_1(t)\,y_2(t)$$
$$y_2'(t) = 5y_2(t) - 2y_2^2(t) - y_1(t)\,y_2(t)$$

Nehme z.B. an, dass zur Zeit T $y_1(T) = 0$ ist. Dann gilt

$$y_1'(T) = \underbrace{y_1(T)}_{=0}\big(2 - y_1(T) + y_2(T)\big) = 0$$
$$y_2'(T) = 5y_2(T) - 2y_2^2(T) - \underbrace{y_1(T)}_{=0}\,y_2(T)$$

$\Rightarrow$ $y_1(t) \equiv 0$ für alle $t \geq T$, und $y_2(t)$ ist unabhängig von $y_1(t)$.