113

4. Numerische Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen

Gegeben: Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(y(t)) \qquad \text{für alle } t \in (t_0, t_{end})$$
$$y(t_0) = y_0$$

(z.B. $t_0 = 0$)

Frage: Wie bestimmt man die Lösung $y(t)$?

Antwort: Falls $f(y(t)) = Ay(t)$ linear ist und die Eigenwerte und Eigenvektoren von A bekannt sind, kann man die Lösungsformel aus 3.2 verwenden.

114

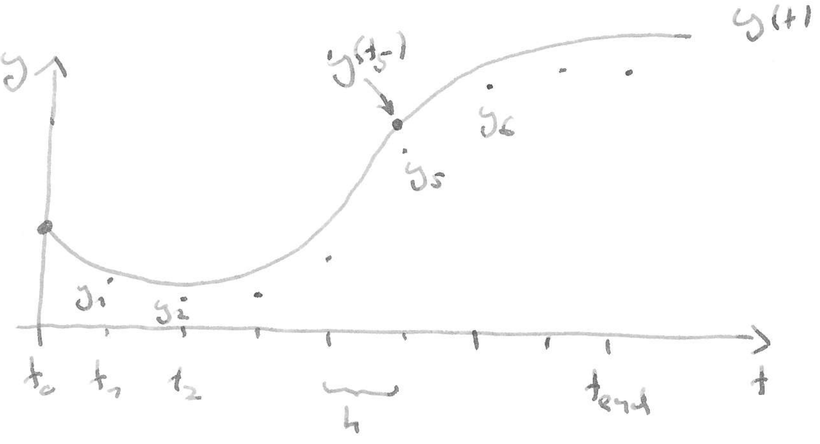
Auch für manche anderen AWPs sind Lösungsformeln bekannt (z.B. Verhulst-AWP aus 2.1).

Aber: Die meisten AWPs können nicht mit analytischen Methoden (d.h. mit Papier und Bleistift) gelöst werden!

Ausweg?

Idee: Wähle $N \in \mathbb{N}$, definiere Schrittweite $h = \frac{t_{end} - t_0}{N}$ und Zeitpunkte $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_N = t_{end}$, wobei $t_n = t_0 + n \cdot h$, d.h. $t_{n+1} - t_n = h$.
Bestimme keine Lösungs<u>formel</u>, sondern berechne nur eine <u>numerische Lösung</u>, d.h. Berechne Approximationen $y_n \approx y(t_n)$ an den Zeitpunkten $t_0, t_1, \ldots, t_N$.
Das ist eine viel schwächere Anforderung!

Skizze:



$N = 8$

$h = \frac{t_{end}}{8}$

Für $N \longrightarrow \infty$ (bzw. $h \longrightarrow 0$) soll der Approximationsfehler $y_n - y(t_n)$ für alle $n \in \{0, \dots, N\}$ gegen 0 konvergieren.

4.1 Explizites Euler-Verfahren

Einfachstes und ältestes Verfahren für AWPs

Euler 1768

Idee: Taylor-Entwicklung (vgl. 1.4) der exakten (unbekannten) Lösung

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) \\ &= y(t_n) + h y'(t_n) + R_1(t_n, t_{n+1}) \\ &\approx y(t_n) + h f(y(t_n)) \end{aligned}$$

weil $|R_1(t_n, t_{n+1})| \leq C \cdot |t_{n+1} - t_n|^2 = C \cdot h^2 \longrightarrow 0$ für $h \longrightarrow 0$

(vgl. Satz 4, Kap. 1.4)

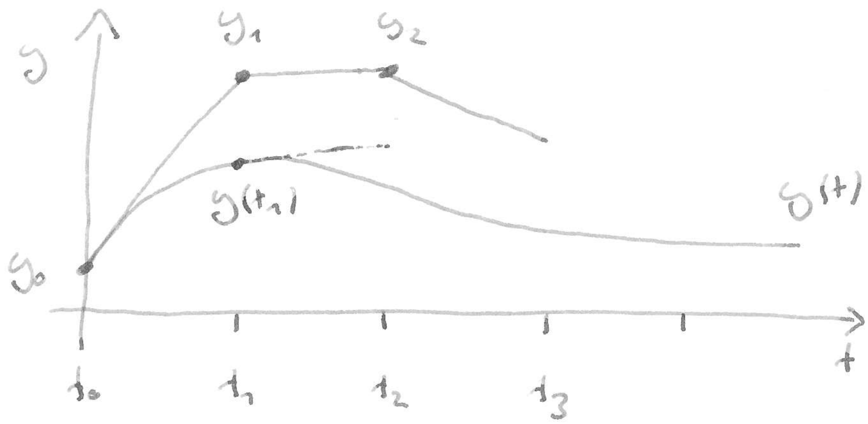
Definiere Approximationen durch die Iterationsvorschrift

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_n) \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Bemerkung: Der Anfangswert y_0 ist bekannt. Berechne dann

$$y_1 = y_0 + h f(y_0), \qquad y_2 = y_1 + h f(y_1) \quad \text{usw.}$$

Skizze:



Wichtiger Vorteil: Dieses Verfahren kann programmiert und auf einem Computer ausgeführt werden.

Beispiel: Betrachte das AWP

$$y'(t) = \lambda y(t) \qquad \text{für alle } t \in (0,1)$$
$$y(0) = 1$$

(d.h. $f(y(t)) = \lambda y(t)$, $t_{end} = 1$, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $d = 1$, $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Exakte Lösung: $y(t) = e^{t\lambda}$

Numerisches Experiment: Die numerische Lösung scheint wie gefordert für $N \to \infty$ bzw. $h \to 0$ gegen die exakte Lösung zu konvergieren, d.h.

$$\lim_{h \to 0} |y_n - y(t_n)| = 0$$

Explizites Euler-Verfahren:

$$
\begin{aligned}
y_n &= y_{n-1} + h f(y_{n-1}) \\
&= y_{n-1} + h\lambda y_{n-1} \\
&= (1+h\lambda)\, y_{n-1} \\
&= (1+h\lambda)^2\, y_{n-2} \\
&= (1+h\lambda)^n \underbrace{y_0}_{=1}
\end{aligned}
$$

Für $n \geq 2$ definiere

$$g(h) = (1+h\lambda)^n$$

$$\Rightarrow \quad g'(h) = n\,(1+h\lambda)^{n-1} \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow \quad g''(h) = n\cdot(n-1)\,(1+h\lambda)^{n-2} \cdot \lambda^2$$

Taylor-Entwicklung:

$$
\begin{aligned}
g(h) &= g(0) + g'(0)h + g''(0)\frac{h^2}{2} + \hat{R}_2(0,h) \\
&= 1 + n\lambda\cdot h + n\cdot(n-1)\cdot\lambda^2\frac{h^2}{2} + \hat{R}_2(0,h) \\
&= 1 + \lambda t_n + \frac{1}{2}\lambda^2(t_n^2 - h t_n) + \hat{R}_2(0,h)
\end{aligned}
$$

da $nh = \underbrace{t_0}_{=0} + nh = t_n$

Andererseits liefert die Taylor-Entwicklung

$$y(t_n) = y(0) + y'(0)\,t_n + y''(0)\frac{t_n^2}{2} + \tilde{R}_2(0,t_n)$$

im Fall der exakten Lösung $y(t) = e^{t\lambda}$ dass

$$
\begin{aligned}
e^{t_n\lambda} &= 1 + \lambda\cdot\underbrace{e^{0\cdot\lambda}}_{=1}\cdot t_n + \lambda^2\cdot\underbrace{e^{0\cdot\lambda}}_{=1}\frac{t_n^2}{2} + \tilde{R}_2(0,t_n) \\
&= 1 + \lambda t_n + \frac{1}{2}\lambda^2 t_n^2 + \tilde{R}_2(0,t_n)
\end{aligned}
$$

Somit gilt also für den Fehler des expliziten Euler-Verfahrens, dass

$$|y(t_n) - y_n| = |e^{\lambda t_n} - g(h)|$$

$$= \left|\left(1+\lambda t_n + \tfrac{1}{2}\lambda^2 t_n^2 + \tilde{R}_2(0,t_n)\right) - \left(1+\lambda t_n + \tfrac{1}{2}\lambda^2 t_n^2 - \tfrac{1}{2}\lambda^2 h t_n + \hat{R}_2(0,h)\right)\right|$$

$$= \left| -\tfrac{1}{2}\lambda^2 h t_n + \underbrace{\tilde{R}_2(0,t_n) - \hat{R}_2(0,h)}_{\text{Terme höherer Ordnung, d.h. } h^2\cdot(\dots)} \right|$$

Das beweist, dass $\lim_{h\to 0} |y(t_n) - y_n| = 0$ für alle $n \in \{1,2,\dots,N\}$

Genauer: Für hinreichend kleine h kann $\tilde{R}_2$ und $\hat{R}_2$ vernachlässigt werden, und es gilt

$$|y(t_n) - y_n| \leq C\cdot h \qquad \text{für alle } n \in \{1,\dots,N\}$$

mit einer Konstanten C, die von λ, aber nicht von h abhängt.

4.2 Implizites Euler-Verfahren

Betrachte wieder das AWP

$$y'(t) = \cancel{f(t,y(t))}\ \lambda y(t)$$
$$y(0) = 1$$

aber nun mit $\lambda < 0$ und $|\lambda| = -\lambda$ groß (z.B. $\lambda = -1000$).

Exakte Lösung: $y(t) = e^{\lambda t} = e^{-|\lambda|\cdot t}$

beschränkt, positiv, monoton fallend, „steif"
konvergiert schnell gegen 0