Numerisches Experiment: Wendet man das explizite Euler-Verfahren auf das AWP (1) mit $\lambda = -1000$ an, so erhält man nur dann akzeptable Approximationen $y_n \approx y(t_n)$, wenn die Schrittweite h sehr klein ist. Für $h > 0.002$ „explodiert" die numerische Lösung, d.h. $|y_n| \to \infty$ für $n \to \infty$.

Warum?

Für die Approximationen des expliziten Euler-Verfahrens angewandt auf (1) gilt (vgl. 4.1)

$$y_n = (1+h\lambda)^n$$

Falls $|1+h\lambda| > 1$ ist, folgt $|y_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ (instabil)

Falls $|1+h\lambda| \leq 1$ ist, folgt $|y_n| \leq 1$ für alle n. (stabil)

Es gilt

$$|1+h\lambda| \leq 1 \iff \underbrace{1+h\lambda \leq 1}_{\text{ist wegen } \lambda<0,\ h>0 \text{ immer erfüllt}} \text{ und } 1+h\lambda \geq -1$$

$$\begin{aligned}
&\iff 1+h\lambda \geq -1 && \mid +1 \\
&\iff 2+h\lambda \geq 0 && \mid \lambda = -|\lambda| \\
&\iff 2-h|\lambda| \geq 0 \\
&\iff 2 \geq h\cdot|\lambda| \\
&\iff \frac{2}{|\lambda|} \geq h
\end{aligned}$$

Die Approximationen des expliziten Euler-Verfahrens bleiben also nur dann beschränkt, wenn die Stabilitätsbedingung

(2) $$h \le \frac{2}{|\lambda|}$$

erfüllt ist. Falls $|\lambda|$ sehr groß ist, muss eine sehr kleine Schrittweite h gewählt werden.

Problem: kleine Schrittweite $h = \frac{t_{end} - t_0}{N}$ $\Leftrightarrow$ viele Schritte (N Stück)
$\Leftrightarrow$ lange Rechenzeit

Beispiel: Betrachte (1) für $\lambda = -100$, $t_0 = 0$, $t_{end} = 1$

$$(2) \Leftrightarrow h \le \frac{2}{|-100|} = 0.02$$

Wegen $h = \frac{1}{N}$ braucht man also mindestens 50 Schritte, um eine stabile (nicht unbedingt genaue) numerische Lösung zu erhalten. $\Rightarrow$ ineffizient!

Ziel: Suche ein neues Verfahren, das schon für große Schrittweiten stabil ist.

Implizites Euler-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_{n+1}) \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

$\uparrow$ statt y_n

Im n-ten Schritt ist y_n bereits bekannt und y_{n+1} muss neu berechnet werden. Da y_{n+1} jedoch auf beiden Seiten der Gleichung auftritt, erhält man keine explizite Formel, sondern muss zur Bestimmung von y_{n+1} eine nichtlineare Gleichung lösen („implizites" Verfahren). Dafür gibt es spezielle numerische Verfahren (Newton-Verfahren, vgl. Kap. 6 (falls Zeit bleibt)).

Im Fall des AWPs (1) kann man jedoch nach y_{n+1} auflösen:

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_{n+1}) = y_n + h\lambda y_{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (1-h\lambda) y_{n+1} = y_n$$

$$\Longleftrightarrow \quad y_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_n \qquad (\text{falls } 1-h\lambda \neq 0)$$

Ähnlich wie beim expliziten Euler-Verfahren erhält man

$$y_n = \frac{1}{1-h\lambda} y_{n-1} = \frac{1}{(1-h\lambda)^2} y_{n-2} = \dots = \frac{1}{(1-h\lambda)^n} \underbrace{y_0}_{=1}$$

Für $\lambda < 0$ gilt

$$|y_n| \leq 1 \text{ für alle } n \Longleftrightarrow \frac{1}{|1-h\lambda|} \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow 1 \leq |1-h\lambda| = 1 + h|\lambda|$$

Diese „Bedingung" ist für jedes beliebige $h > 0$ erfüllt!
Keine Einschränkung ~~an~~ der Schrittweite, d.h. die numerische Lösung explodiert auch bei sehr großen Schrittweiten nicht.

Definition 1 (A-Stabilität)

Ein numerisches Verfahren zur Lösung des AWPs

$$y'(t) = f(y(t))$$
$$y(0) = y_0$$

heißt A-stabil, falls die Approximationen y_n im Spezialfall

$$f(y(t)) = \lambda y(t), \quad \lambda < 0, \quad y_0 = 1$$

für jede beliebige Schrittweite h und jedes $n \in \mathbb{N}$ im Intervall $[-1, 1]$ liegen, d.h. $y_n \in [-1, 1]$ für alle $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Bemerkung: Das im~~ex~~plizite Euler-Verfahren ist A-stabil, das explizite nicht.

Genauigkeit bzw. Konvergenz des impliziten Euler-Verfahrens

Wie in 4.1 kann man zeigen, dass auch für die Approximationen des impliziten Euler-Verfahrens

$$|y(t_n) - y_n| \leq Ch \quad \text{für alle } n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten $C > 0$ gilt.

Bemerkung: Das AWP (1) dient nur als Modellproblem. Dieselben Phänomene (Stabilität / Instabilität, Konvergenz) treten jedoch auch bei komplizierteren AWPs auf.

4.3 Verfahren höherer Ordnung

Definition 2 (Ordnung)

Ein numerisches Verfahren zur Lösung von AWPs mit hinreichend regulärem $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ hat die Ordnung $p \in \mathbb{N}$, falls die Approximationen $y_n \approx y(t_n)$ für hinreichend kleine h eine Abschätzung der Form

$$\|y_n - y(t_n)\|_\infty \leq C \cdot h^p \qquad \text{für } n \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten C erfüllen. Dabei ist

$$\|v\|_\infty = \max_{i \in \{1, \ldots, d\}} |v_i|$$

die Maximumsnorm eines Vektors $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$.