

Bemerkung: Je höher die Ordnung  $p$ , desto schneller verringert sich für  $h \rightarrow 0$  der Approximationsfehler, z.B.

$h$	$h^2$	$h^3$	$h^4$
0.1	0.01	0.001	0.0001
0.01	0.0001	0.000001	0.00000001

Aus 4.1 bzw. 4.2 wissen wir, dass beide Euler-Verfahren nur die Ordnung  $p=1$  haben. Die folgenden Verfahren haben  $p=2$ :

(a) Implizite Mittelpunktsregel:

$$y_{n+1} = y_n + h f\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right) \quad (A\text{-stabil})$$

(b) Implizite Trapezregel:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(y_n) + f(y_{n+1})) \quad (A\text{-stabil})$$

(c) Verfahren von Heun:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(y_n) + f(z_{n+1})) \quad (\text{explizit, nicht } A\text{-stabil})$$

$$\text{mit } z_{n+1} = y_n + h f(y_n) \approx y_{n+1}$$

Bemerkung: Diese Verfahren sowie beide Euler-Verfahren sind sogenannte Runge-Kutta-Verfahren. Man kann auch Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung  $p=3, 4, 5, \dots$  konstruieren, doch die Verfahren werden dann immer komplizierter.