Mathematische Modelle und numerische Methoden in der Biologie

Sommersemester 2012

1. Übungsblatt

Gruppenübung (Besprechung in der Übung am 26. 4. 2012)

G1:
Sei

$$v = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich:

(a) $x + y$

(b) $-\frac{1}{2} \cdot y + x$

(c) vx

(d) xy^T

(e) $we^{(2)}$

(f) $\langle w, x \rangle$

(g) Überprüfen Sie durch nachrechnen, dass hier gilt $\langle x, y \rangle = y^T x$

(h) Überprüfen Sie durch nachrechnen, dass hier gilt $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e^{(i)}$

Lösung:

(a) $x + y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2+1 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $-\frac{1}{2} \cdot y + x = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + 1 \\ -\frac{1}{2} + 2 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $vx = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 28$

(d) $xy^T = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 1 & 1\cdot 1 & 1\cdot 0\\2\cdot 1 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0\\1\cdot 1 & 1\cdot 1 & 1\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 2 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

(e) $we^{(2)} = \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 4\cdot 0 + 5\cdot 1 + 6\cdot 0 = 5$

(f) $\langle w, x\rangle = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1 = 20$

(g) $\langle x, y\rangle == 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 = 3 = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = y^Tx$

(h) $\sum_{i=1}^3 x_ie^{(i)} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0+0\\0+2+0\\0+0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = x$

G2:
Sei

$$A = \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich:

(a) Ab

(b) b^TA

(c) Vergleichen Sie Ihre Lösung aus a) mit der Darstellung aus Lemma 1 der Vorlesung: Die drei Einträge des Ergebnis-Vektors sind hierbei das Skalarprodukt der ersten (bzw. 2., 3.) Zeile der Matrix A mit dem Vektor b. *(Hinweis: Sie können sich die Berechnung eines Skalarprodukts sparen, wenn Sie G1 f) verwenden)*

Lösung:

(a) $Ab = \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 6\cdot 1\\2\cdot 1 + 5\cdot 2 + 8\cdot 1\\3\cdot 1 + 6\cdot 2 + 9\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\20\\24\end{pmatrix}$

(b) $b^TA = \begin{pmatrix}11 & 21 & 31\end{pmatrix}$

(c)

$$\begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 9 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$$

G3:
Sei

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich:

(a) $A - B$
(b) $A \cdot 2 \cdot B$
(c) BA
(d) IAB
(e) ABI
(f) $B(CD)$
(g) $(BC)D$
(h) $I \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T$
(i) C^T

Lösung:

(a) $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 & 1-4 & 2-6 \\ 3-1 & 4-0 & 5-2 \\ 6-4 & 7-6 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A \cdot 2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 2 & 0 & 4 \\ 8 & 12 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 8 & 0 \cdot 8 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 12 & 0 \cdot 12 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 8 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 12 & 3 \cdot 12 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \\ 6 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot 8 & 6 \cdot 8 + 7 \cdot 0 + 1 \cdot 12 & 6 \cdot 12 + 7 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 8 \\ 60 & 84 & 62 \\ 46 & 60 & 102 \end{pmatrix}$$

(c) $BA = \begin{pmatrix} 48 & 60 & 30 \\ 12 & 15 & 4 \\ 24 & 35 & 39 \end{pmatrix}$

(d)

(e) $IAB = ABI = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 4 \\ 30 & 42 & 31 \\ 23 & 30 & 51 \end{pmatrix}$

(f)

(g) $B(CD) = (BC)D = \begin{pmatrix} 152 & 64 & 96 & 72 \\ 33 & 12 & 21 & 15 \\ 151 & 68 & 95 & 73 \end{pmatrix}$

(h) $I \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T$: Berechnung nicht möglich, da die Dimensionen nicht passen

(i) $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

G4:

Bestimmen Sie v_2 für die folgenden Vektoren so, dass beide Vektoren orthogonal zueinander sind:

$$v = \begin{pmatrix} 1 & v_2 & 2 \end{pmatrix}^T \qquad w = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}^T$$

Lösung:

Für orthogonale Vektoren gilt:

$$\langle v, w \rangle = 0$$

Hier muss also gelten:

$$1 \cdot (-4) + v_2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = -4 + 5v_2 + 4 = 5v_2 \stackrel{!}{=} 0$$

und dies ist für $v_2 = 0$ der Fall.

Hausübung (Abgabe[1] bis zum 10. 5. 2012)

H1: (12 Punkte)
Sei

$$v = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich:

(a) $x - \frac{1}{3}y$

(b) wy

(c) xy^T

(d) $we^{(1)}$

(e) $\langle v, y \rangle$

(f) vw

Lösung:

(a) $x - \frac{1}{3}y = \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(b) $wy = 0 + 0 + 24 = 24$

(c) $xy^T = \begin{pmatrix} 0 & 9\pi & 12\pi \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $we^{(1)} = -4$

(e) $\langle v, y \rangle = 0 + 45 + 84 = 129$

(f) vw: Berechnung nicht möglich, da die Dimensionen nicht passen

H2: (4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich:

[1] Bitte geben Sie Ihre Lösungsvorschläge für die Hausübungen bis zum 10. 5. 2012 bei Ihrem Übungsleiter ab oder werfen Sie sie **vor** Beginn der Übung am 10. 5. 2012 in den grünen Kasten in Stockwerk 1C im Allianzgebäude (Geb. 05.20, Kaiserstr. 93). Erhaltene Punkte werden auf die Klausur angerechnet. Details hierzu entnehmen Sie bitte der Webseite zur Vorlesung: `http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/mathmod2012s/`

(a) Ab (b) $b^T A$

Lösung:

(a) $Ab = \begin{pmatrix} 42 \\ 54 \\ 54 \end{pmatrix}$

(b) $b^T A = \begin{pmatrix} 42 & 54 & 54 \end{pmatrix}$

H3: (10 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, falls möglich:

(a) $\frac{1}{2}B$ (b) $AC^T BD^T$

Lösung:

(a) $\frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $AC^T BD^T = \begin{pmatrix} 1452 & 1352 \\ 1620 & 1500 \end{pmatrix}$

H4: (4 Punkte)
Für welche $v_1 \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren **nicht** orthogonal zueinander:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & 7 & 55 \end{pmatrix}^T \qquad w = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T$$

Lösung:

Für orthogonale Vektoren gilt:

$$\langle v, w \rangle = 0$$

Hier muss also gelten:

$$v_1 \cdot (-2) + 7 \cdot 2 + 55 \cdot (-2) = -2v_1 + 14 - 110 = -2v_1 - 96 \overset{!}{\neq} 0$$

und damit $v_1 \overset{!}{\neq} \frac{-96}{2} = -48$. Die Vektoren sind also für alle $v_1 \in \mathbb{R}\backslash\{-48\}$ nicht orthogonal.