Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Biol. Michael Kreim

Mathematische Modelle und numerische Methoden in der Biologie

Sommersemester 2012

2. Übungsblatt

Gruppenübung (Besprechung in der Übung am 10.05.2012)

G5:
Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

(a) $\frac{d}{dx} c$

(b) $\frac{d}{dx} \sum_{i=1}^{n} c_i x^i$

(c) $\frac{d}{dx} e^x$

(d) $\frac{d}{dx} \sin(x)$

(e) $\frac{d}{dx} \cos(x)$

(f) $\frac{d}{dx} \left(y^3 + x^2 + y^1 + x^0\right)$

Lösung:

(a) $\frac{d}{dx} c = 0$

(b) $\frac{d}{dx} \sum_{i=1}^{n} c_i x^i = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot i \cdot x^{(i-1)}$

(c) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

(d) $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$

(e) $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$

(f) $\frac{d}{dx} \left(y^3 + x^2 + y^1 + x^0\right) = 2x$

G6:
Sei

$$f(x) = ax^2 \qquad\qquad g(x) = bx$$

Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

(a) $\frac{d}{dx} \left(f(x) + g(x)\right)$

(b) $\frac{d}{dx} \left(f(x) - g(x)\right)$

(c) $\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x)$

(d) $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)}$

(f) $\frac{d}{dx} e^{f(x)}$

Lösung:

(a) $\frac{d}{dx} \left(f(x) + g(x)\right) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x) = 2ax + b$

(b) $\frac{d}{dx}\left(f(x)-g(x)\right)=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)=2ax-b$

(c) $\frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)=\frac{df(x)}{dx}\cdot g(x)+f(x)\cdot\frac{dg(x)}{dx}=2abx^2+abx^2=3abx^2$

(d) $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{df(x)}{dx}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2}=\frac{2abx^2-abx^2}{b^2x^2}=\frac{abx^2}{b^2x^2}=\frac{a}{b}$

(e) $\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)}=\frac{-\frac{df(x)}{dx}}{f(x)^2}=\frac{-2ax}{a^2x^4}=\frac{-2}{ax^3}$

(f) $\frac{d}{dx}e^{f(x)}=2ax\cdot e^{(ax^2)}$

G7:

Bestimmen Sie die folgenden Integrale

(a) $\int_0^2 c\mathrm{d}x$

(b) $\int_1^2\sum_{i=1}^n c_i x^i\mathrm{d}x$

(c) $\int_1^2 e^x\mathrm{d}x$

(d) $\int_0^\pi\sin(x)\mathrm{d}x$

(e) $\int_0^\pi\cos(x)\mathrm{d}x$

(f) $\int_1^2\sqrt{x}\mathrm{d}x$

(g) $\int_1^e\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

Lösung:

(a) $\int_0^2 c\mathrm{d}x=[cx]_0^2=2c-0c=2c$

(b) $\int_1^2\sum_{i=1}^n c_i x^i\mathrm{d}x=\left[\sum_{i=1}^n\frac{c_i}{i+1}x^{i+1}\right]_1^2=\sum_{i=1}^n\frac{c_i}{i+1}\left(2^{i+1}-1\right)$

(c) $\int_1^2 e^x\mathrm{d}x=[e^x]_1^2=e^2-e$

(d) $\int_0^\pi\sin(x)\mathrm{d}x=[-\cos(x)]_0^\pi=-\cos(\pi)+\cos(0)=1+1=2$

(e) $\int_0^\pi\cos(x)\mathrm{d}x=[\sin(x)]_0^\pi=\sin(\pi)-\sin(0)=0$

(f) $\int_1^2\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int_1^2 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2^3}-\sqrt{1^3}\right)=\sqrt{8}-1$

(g) $\int_1^e\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln|x|]_1^e=\ln e-\ln 1=1$

G8:

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix mit Hilfe des charakteristischen Polynoms:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Das charakteristische Polynom der Matrix ist gegeben durch:

$$p(x) = x^2 - (a_{11} + a_{22})x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Wir suchen also die Nullstellen von:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

und wir bekommen mit der Mitternachtsformel (auch a-b-c-Formel oder große Auflösungsformel, alternativ geht auch die pq-Formel) (mit $a = 1$, $b = -3$, $c = -10$):

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 + 40}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \\ x_1 &= \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 &= \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

Die Matrix A hat also die Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = -2$. Die beiden zugehörigen Eigenvektoren v_1 und v_2 ergeben sich dann durch die Relation $Av_i = \lambda_i v_i$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} &= 5 \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_{1,1} + 3v_{1,2} \\ 4v_{1,1} + 2v_{1,2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5v_{1,1} \\ 5v_{1,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies gilt z.B. für $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und alle Vielfache des Vektors.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} &= -2 \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_{2,1} + 3v_{2,2} \\ 4v_{2,1} + 2v_{2,2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2v_{2,1} \\ -2v_{2,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies gilt z.B. für $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und alle Vielfache des Vektors.

G9:

Bestimmen Sie den Eigenwert λ der Matrix A zum Eigenvektor v:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Es gilt $Av = \lambda v$ wobei λ der gesuchte Eigenwert ist. Wir berechnen also zunächst:

$$Av = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Wir suchen also nun den Eigenwert λ so dass

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und dies ist offensichtlich für $\lambda = 2$ der Fall.

G10:

Zeigen Sie, dass

$$e^x \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$$

indem Sie die Funktion e^x um den Punkt $x_0 = 0$ nach Taylor entwickeln.

Lösung:

$$e^{x+0} \approx \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \underbrace{\frac{d^n e^0}{dx^n}}_{=1} \underbrace{(x-0)^n}_{=x^n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$$

G11:

Ein Gepard (*Acinonyx jubatus*) beschleunigt mit konstanter Beschleunigung von $0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf $30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in 4 Sekunden und rennt dann mit konstanter Geschwindigkeit weiter, gibt aber nach $300\,\mathrm{m}$ die Verfolgung auf. Eine Thomson-Gazelle (*Eudorcas thomsoni*) flieht mit konstanter Geschwindigkeit von $15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und ist $100\,\mathrm{m}$ entfernt.

(a) Mit welcher Beschleunigung bewegt sich der Gepard innerhalb der ersten $4\,\mathrm{s}$?

(b) Welche Beschleunigung hat er danach?

(c) Welche Beschleunigung hat die Gazelle?

(d) Welche Strecke legt der Gepard innerhalb der ersten 4 Sekunden zurück?

(e) Welche Strecke hat der Gepard nach $8\,\mathrm{s}$ zurückgelegt?

(f) Welche Strecke hat die Gazelle nach $4\,\mathrm{s}$ bzw. $8\,\mathrm{s}$ zurückgelegt (inklusive des Vorsprungs) ?

(g) Kann der Gepard die Gazelle fangen? (*Tipp: Fertigen Sie eine Skizze an*)

Tipp: Der Ort $x(t)$, die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$ eines Objektes zur Zeit t hängen wie folgt zusammen:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t)$$

Lösung:

(a) Die Beschleunigung ist konstant. Wir setzten also $a_{\mathsf{G}}(t) := \hat{a}_{\mathsf{G}}$ und wir wissen, dass Geschwindigkeit und Beschleunigung zusammenhängen als

$$v_{\mathsf{G}}(t) = \int_0^t a_{\mathsf{G}}(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \hat{a}_{\mathsf{G}}\mathrm{d}\tau = [\hat{a}_{\mathsf{G}}\tau]_0^t = \hat{a}_{\mathsf{G}} \cdot t$$

Wir stellen nach $\hat{a}_{\mathsf{G}}$ um und können die Beschleunigung des Geparden in den ersten $4\,\mathrm{s}$ berechnen:

$$\hat{a}_{\mathsf{G}} = \frac{v_{\mathsf{G}}(t)}{t} = \frac{30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4\,\mathrm{s}} = 7.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

(b) Objekte mit konstanter Geschwindigkeit haben eine Beschleunigung von $0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, da:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \hat{v} = 0$$

(c) siehe (b)

(d) Die Strecke ergibt sich als Integral über die Geschwindigkeit, wobei wir hier den in (a) bestimmten Zusammenhang von Beschleunigung und Geschwindigkeit einsetzten:

$$x_{\mathsf{G}}(t) = \int_0^t v_{\mathsf{G}}(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \hat{a}_{\mathsf{G}} \cdot \tau \mathrm{d}\tau = \left[\frac{1}{2}\hat{a}_{\mathsf{G}} s^2\right]_0^t = \frac{1}{2}\hat{a}_{\mathsf{G}} t^2 = \frac{1}{2} 7.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 = 3.75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$$

Der Gepard legt also in den ersten $4\,\mathrm{s}$ bereits $x_{\mathsf{G}}\,(4\,\mathrm{s}) = 3.75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (4\,\mathrm{s})^2 = 60\,\mathrm{m}$ zurück.

(e) Hier müssen wir zu den $60\,\mathrm{m}$ aus (d) die Strecke, die der Gepard in den nächsten 4 Sekunden zurücklegt, addieren:

$$\begin{aligned} x_{\mathsf{G}}(8\,\mathrm{s}) &= 60\,\mathrm{m} + \int_{4\,\mathrm{s}}^{8\,\mathrm{s}} v_{\mathsf{G}}(s)\mathrm{d}s = 60\,\mathrm{m} + \left[30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t\right]_{4\,\mathrm{s}}^{8\,\mathrm{s}} \\ &= 60\,\mathrm{m} + 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 8\,\mathrm{s} - 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4\,\mathrm{s} = 180\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

(f) Die Thomson-Gazelle legt in der Zeit t die folgende Strecke zurück (vgl. (e)):

$$
\begin{aligned}
x_{\mathsf{T}}(t) &= 100\,\mathrm{m} + \int_0^t v_{\mathsf{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau = 100\,\mathrm{m} + \int_0^t 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\mathrm{d}\tau \\
&= 100\,\mathrm{m} + \left[15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \tau\right]_0^t = 100\,\mathrm{m} + 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t
\end{aligned}
$$

Damit ergeben sich die gesuchten Strecken zu:

$$
\begin{aligned}
x_{\mathsf{T}}(4\,\mathrm{s}) &= 100\,\mathrm{m} + 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4\,\mathrm{s} = 160\,\mathrm{m} \\
x_{\mathsf{T}}(8\,\mathrm{s}) &= 100\,\mathrm{m} + 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 8\,\mathrm{s} = 220\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

(g) Wie oben gezeigt ergeben sich die zurückgelegten Strecken der beiden Tiere für die Zeiten nach der Beschleunigungsphase zu:

$$
\begin{aligned}
x_{\mathsf{G}}(t) &= 60\,\mathrm{m} + 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4\,\mathrm{s} = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 60\,\mathrm{m} \\
x_{\mathsf{T}}(t) &= 100\,\mathrm{m} + 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t
\end{aligned}
$$

Wir suchen nun den Zeitpunkt an dem der Gepard die Gazelle fängt also:

$$
\begin{aligned}
x_{\mathsf{G}}(t) &= x_{\mathsf{T}}(t) \\
30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 60\,\mathrm{m} &= 100\,\mathrm{m} + 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t \\
30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t &= 100\,\mathrm{m} + 60\,\mathrm{m} \\
15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t &= 160\,\mathrm{m} \\
t &= \frac{160\,\mathrm{m}}{15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 10.67\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

Um zu überprüfen ob die Lösung im zugelassenen Bereich liegt (also ob der Gepard nicht mehr als $300\,\mathrm{m}$ gerannt ist), berechnen wir die Entfernung, die der Gepard in dieser Zeit zurücklegen kann:

$$
x_{\mathsf{G}}(10.67\,\mathrm{s}) = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10.67\,\mathrm{s} - 60\,\mathrm{m} \approx 260\,\mathrm{m}
$$

Der Gepard kann die Thomson-Gazelle also fangen.

Hausübung (Abgabe[1] bis zum 24.05.2012)

H5: (6 Punkte)
Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix mit Hilfe des charakteristischen Polynoms:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Das charakteristische Polynom der Matrix ist gegeben durch:

$$p(x) = x^2 - (a_{11} + a_{22})x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Wir suchen also die Nullstellen von:

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

und wir bekommen mit der Mitternachtsformel (auch a-b-c-Formel oder große Auflösungsformel, alternativ geht auch die pq-Formel) (mit $a = 1$, $b = -5$, $c = -6$):

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \\ x_1 &= \frac{12}{2} = 6 \\ x_2 &= \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

Die Matrix A hat also die Eigenwerte $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = -1$. Die beiden zugehörigen Eigenvektoren v_1 und v_2 ergeben sich dann durch die Relation $Av_i = \lambda_i v_i$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} &= 6 \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2v_{1,1} + 3v_{1,2} \\ 4v_{1,1} + 3v_{1,2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6v_{1,1} \\ 6v_{1,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies gilt z.B. für $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und alle Vielfache des Vektors.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} &= -1 \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2v_{2,1} + 3v_{2,2} \\ 4v_{2,1} + 3v_{2,2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -v_{2,1} \\ -v_{2,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[1] Bitte geben Sie Ihre Lösungsvorschläge für die Hausübungen bis zum 24.05.2012 bei Ihrem Übungsleiter ab oder werfen Sie sie **vor** Beginn der Übung am 24.05.2012 in den grünen Kasten in Stockwerk 1C im Allianzgebäude (Geb. 05.20, Kaiserstr. 93). Erhaltene Punkte werden auf die Klausur angerechnet. Details hierzu entnehmen Sie bitte der Webseite zur Vorlesung: `http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/mathmod2012s/`

Dies gilt z.B. für $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und alle Vielfache des Vektors.

H6: (4 Punkte)
Bestimmen Sie den Eigenwert λ der Matrix A mit gegebenen Eigenvektor v:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Es gilt $Av = \lambda v$ wobei λ der gesuchte Eigenwert ist. Wir berechnen also zunächst:

$$Av = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wir suchen also nun den Eigenwert λ so dass

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und dies ist offensichtlich für $\lambda = -2$ der Fall.

H7: (8 Punkte)
Zeigen Sie, dass

$$\sin(x) \approx \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

indem Sie die Funktion $\sin(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$ nach Taylor entwickeln.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\sin(x) &\approx \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \frac{d^n sin(x_0)}{dx^n}(x-x_0)^n \\
&= \frac{1}{0!}\frac{d^0 sin(x_0)}{dx^0}(x-x_0)^0 + \frac{1}{1!}\frac{d^1 sin(x_0)}{dx^1}(x-x_0)^1 + \frac{1}{2!}\frac{d^2 sin(x_0)}{dx^2}(x-x_0)^2 \\
&+ \frac{1}{3!}\frac{d^3 sin(x_0)}{dx^3}(x-x_0)^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4 sin(x_0)}{dx^4}(x-x_0)^4 + \dots \\
&= \frac{1}{0!} sin(x_0)(x-x_0)^0 + \frac{1}{1!} cos(x_0)(x-x_0)^1 + \frac{1}{2!} - sin(x_0)(x-x_0)^2 \\
&+ \frac{1}{3!} - cos(x_0)(x-x_0)^3 + \frac{1}{4!} sin(x_0)(x-x_0)^4 + \dots \\
&= \frac{1}{0!} 0x^0 + \frac{1}{1!} 1x^1 + \frac{1}{2!} 0x^2 + \frac{1}{3!}(-1)x^3 + \frac{1}{4!} 0x^4 + \dots = + \frac{1}{1!} 1x^1 + \frac{1}{3!}(-1)x^3 + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$