Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Biol. Michael Kreim

Mathematische Modelle und numerische Methoden in der Biologie

Sommersemester 2012

3. Übungsblatt

Gruppenübung (Besprechung in der Übung am 24.05.2012)

G12:
Zeigen Sie, dass

$$y(t) = \frac{c \cdot y_0}{d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t}}$$

für gegebene Werte $y_0 \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$ und $d \geq 0$, die Lösung der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung (Verhulst-Modell) ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) = c \cdot y(t) - d \cdot y^2(t) \qquad \text{für } t \geq 0$$
$$y(0) = y_0$$

Lösung:

Wir berechnen zunächst die Ableitung von $y(t)$ mit der Quotientenregel (siehe G6 d):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{c \cdot y_0}{d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t}}\right) \\
&= \frac{0 \cdot (d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t}) - c \cdot y_0\,(-c \cdot (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t})}{(d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t})^2} \\
&= \frac{c^2 \cdot y_0 \cdot (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t}}{(d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t})^2}
\end{aligned}$$

Nun setzten wir die Lösung in die rechte Seite der ODE ein und sehen durch Vergleich mit der eben bestimmten Ableitung, dass die Behauptung stimmt:

$$\begin{aligned}
c \cdot y(t) - d \cdot y^2(t) &= c \cdot \left(\frac{c \cdot y_0}{d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t}}\right) - d \cdot \left(\frac{c \cdot y_0}{d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t}}\right)^2 \\
&= \frac{c^2 \cdot y_0\,(d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t})}{(d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t})^2} - \frac{d \cdot c^2 \cdot y_0^2}{(d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t})^2} \\
&= \frac{c^2 \cdot y_0\,(d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t}) - d \cdot c^2 \cdot y_0^2}{(d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t})^2} \\
&= \frac{d \cdot c^2 \cdot y_0^2 + c^2 \cdot y_0 \cdot (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t} - d \cdot c^2 \cdot y_0^2}{(d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t})^2} \\
&= \frac{c^2 \cdot y_0 \cdot (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t}}{(d \cdot y_0 + (c - d \cdot y_0)e^{-c \cdot t})^2}
\end{aligned}$$

G13:
Wir betrachten das SIR-Modell. Dabei sind:

$y_1(t)$ „Susceptible" – Die Anzahl der Individuen, die sich mit der Krankheit infizieren können

$y_2(t)$ „Infected" – Die Anzahl der Individuen, die mit der Krankheit infiziert sind und die Krankheit verbreiten können

$y_3(t)$ „Recovered" – Die Anzahl der Individuen, die nicht mehr infektiös sind und auch nicht mehr infiziert werden können

das Modell besteht aus den folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1(t) = -\alpha y_1(t)y_2(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2(t) = \alpha y_1(t)y_2(t) - \beta y_2(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_3(t) = \beta y_2(t)$$

Die Größe der Gesamtpopulation ergibt sich dabei zu $N(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$. In diesem Modell können Impfstrategien untersucht werden. Wir transformieren unser System zunächst und betrachten eine relative Populationsgröße, indem wir die drei Größen $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ mit $N(t)$ skalieren. Es gilt dann also: $y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = 1$. Wir gehen nun davon aus, dass sich mindestens eine infizierte Person in der Population befindet und betrachten den Fall für den sich die Krankheit ausbreitet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2(t) > 0$$

Daraus lässt sich zeigen, dass sich die Krankheit nur dann ausbreitet, wenn

$$y_1(t) > \frac{1}{R_0}$$

Um eine Ausbreitung zu verhindern, bietet es sich also an, die Anzahl der „Susceptible" zu verkleinern. Wir impfen deswegen einen Bruchteil p der Bevölkerung, so dass der Anteil $(1-p)$ der nicht Geimpften kleiner $\frac{1}{R_0}$ wird.

(a) Bestimmen Sie R_0 in Abhängigkeit der Konstanten α und β.

(b) Bestimmen Sie den Bruchteil p_{crit} der Individuen, die mindestens geimpft werden müssen, um eine Ausbreitung der Krankheit zu verhindern.

(c) Nehmen Sie an, dass zu Beginn der Epidemie $y_1(0) \approx 1$ gilt und bestimmen Sie p_{crit} für Masern ($R_0 \approx 15$), HIV ($R_0 \approx 4$) und die spanische Grippe ($R_0 \approx 2$).

Lösung:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2(t) > 0 \Leftrightarrow \alpha y_1(t)y_2(t) - \beta y_2(t) = (\alpha y_1(t) - \beta)\, y_2(t) > 0 \Leftrightarrow \alpha y_1(t) - \beta > 0 \Leftrightarrow y_1(t) > \frac{\beta}{\alpha} =: \frac{1}{R_0} \Leftrightarrow R_0 = \frac{\alpha}{\beta}$
Die zweite Behauptung gilt da $y_2(t) > 0$. Wir wissen nun also, dass sich die Infektion genau dann ausbreitet, wenn $y_1(t) > \frac{\beta}{\alpha}$.

(b) Wenn $p \cdot y_1(t)$ Individuen geimpft sind, dann sind $(1-p)y_1(t)$ Individuen nicht geimpft. Dieser Bruchteil muss dann kleiner $\frac{1}{R_0}$ sein, damit sich die Krankheit nicht ausbreitet. Die kritische Impfschwelle ist also genau

$$(1 - p_{\text{crit}})\, y_1(t) = \frac{1}{R_0} \Leftrightarrow 1 - p_{\text{crit}} = \frac{1}{R_0 y_1(t)} \Leftrightarrow p_{\text{crit}} = 1 - \frac{1}{R_0 y_1(t)}$$

(c) Da wir annehmen, dass $y_1(0) \approx 1$ und wir an der Anzahl der zu impfenden Individuen vor dem Ausbruch der Krankheit interessiert sind, berechnen wir:

$$p_{\text{crit}} \approx 1 - \frac{1}{R_0}$$

und erhalten damit:

- Masern: $p_{\text{crit}} \approx 1 - \frac{1}{R_0} = 1 - \frac{1}{15} \approx 0.933 = 93.3\%$
- HIV: $p_{\text{crit}} \approx 1 - \frac{1}{R_0} = 1 - \frac{1}{4} = 0.75 = 75\%$
- spanische Grippe: $p_{\text{crit}} \approx 1 - \frac{1}{R_0} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

G14:

Modellieren Sie die Ausbreitung eines Gerüchts auf einer hinreichend großen Party. Dabei sei

$y_1(t)$ die Anzahl der Menschen, die das Gerücht für wahr halten und die spektakuläre Neuigkeit deshalb weitererzählen,

$y_2(t)$ die Anzahl der Menschen, die noch nichts von dem Gerücht gehört haben,

$y_3(t)$ die Anzahl der Menschen, die wissen, dass das Gerücht falsch ist,

$y_4(t)$ die Anzahl der Menschen, die wissen, dass das Gerücht falsch ist, und welche die Party bereits verlassen haben, und

$y_5(t)$ die noch verfügbare Biermenge.

Leiten Sie ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen her, das folgende Phänomene beschreibt:

(a) Leute, die das Gerücht für wahr halten, erzählen Leuten, die das Gerücht noch nicht kennen, was los ist. Die Leute, die von dem Gerücht erfahren, halten es zunächst für wahr.

(b) Leute, die bereits wissen, dass das Gerücht falsch ist, informieren die Leute, die an das Gerücht glauben, dass das Gerücht falsch ist.

(c) Die noch vorhandene Biermenge nimmt proportional zur Menge aller Menschen auf der Party ab.

(d) Die Leute, die wissen, dass das Gerücht nicht stimmt, verlassen die Party. Je weniger Bier noch vorhanden ist, umso mehr Leute brechen auf. (Vereinfachung: Menschen, die an das Gerücht glauben oder noch nichts davon erfahren haben, bleiben auf der Party.)

(e) Manche Leute, die die Party bereits verlassen haben, kommen zurück und bringen neues Bier mit. Alle Zurückgekommenen wissen aber schon, dass das Gerücht falsch ist.

Lösung:
Die oben genannten Bedingungen lassen sich wie folgt modellieren:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_1(t) &= a y_1(t) y_2(t) - b y_1(t) y_3(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_2(t) &= -a y_1(t) y_2(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_3(t) &= b y_1(t) y_3(t) - d \frac{y_3(t)}{y_5(t)} + e y_4(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_4(t) &= d \frac{y_3(t)}{y_5(t)} - e y_4(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_5(t) &= -c y_5(t) \Big(y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \Big) + e y_4(t)
\end{aligned}$$

Die Modellierung ist natürlich nicht eindeutig. Den Term $c_4 y_3(t)/y_5(t)$ könnte man z.B. auch durch $c_4(y_5(0) - y_5(t))y_3(t)$ ersetzen. Wichtig ist aber, dass hier nicht $c_4 y_3(t) y_5(t)$ steht!

Hausübung (Abgabe[1] bis zum 14.06.2012)

H8: (6 Punkte)
Erweitern Sie das in der Vorlesung (2.3) vorgestellte Modell für die Ausbreitung einer Infektionskrankheit. Dabei sei wie in der Vorlesung

- $y_1(t)$ die Anzahl der Menschen, die gesund, aber nicht immun sind,
- $y_2(t)$ die Anzahl der Menschen, die andere anstecken können,
- $y_3(t)$ die Anzahl der Menschen, die sich in der latenten Phase befinden, d.h. die angesteckt, aber noch nicht ansteckend sind,
- $y_4(t)$ die Anzahl der Menschen, die immunisiert sind.

Zusätzlich betrachten wir nun auch

- $y_5(t)$ die Anzahl der Menschen, die krank sind, aber zu Hause im Bett liegen und deshalb ihre Mitmenschen nicht anstecken können. Diese Bevölkerungsgruppe soll proportional zur Anzahl aller Infizierten wachsen. Ständig wird jedoch ein Teil dieser Menschen wieder gesund und ist von nun an immun gegen die Krankheit.

  Wie sehen die zugehörigen Differentialgleichungen aus? Erläutern Sie (kurz) Ihr vorgehen.

Lösung:
Der beschriebene Fall lässt sich wie folgt modellieren:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1(t) &= -ay_1(t)y_2(t) - cy_1(t)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2(t) &= by_3(t) - dy_2(t)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_3(t) &= ay_1(t)y_2(t) - by_3(t)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_4(t) &= cy_1(t) + ey_5(t)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_5(t) &= dy_2(t) - ey_5(t)
\end{aligned}$$

In der Vorlesung wurde in Kapitel 2.3 bereits ein Modell für die Anzahlen $y_1(t)$ bis $y_4(t)$ vorgestellt und diskutiert. Wir müssen dieses Modell nun um die Menschen ($y_5(t)$) erweitern die sich infiziert haben und ins Bett legen (Quarantäne). Die Anzahl dieser Menschen muss von der Anzahl der Infizierten „abgezogen“ werden. Daher kommt der Term $-dy_2(t)$ in der 2. ODE. Dieser Term begegnet uns in der komplett neuen 5. ODE wieder. Der negative Term $-ey_5(t)$ beschreibt hier die Menschen die gesund werden und damit in die Gruppe $y_4(t)$ wandern. Deswegen taucht der zusätzliche Term $+ey_5(t)$ in der 4. ODE auf.

[1] Bitte geben Sie Ihre Lösungsvorschläge für die Hausübungen bis zum 14.06.2012 bei Ihrem Übungsleiter ab oder werfen Sie sie **vor** Beginn der Übung am 14.06.2012 in den grünen Kasten in Stockwerk 1C im Allianzgebäude (Geb. 05.20, Kaiserstr. 93). Erhaltene Punkte werden auf die Klausur angerechnet. Details hierzu entnehmen Sie bitte der Webseite zur Vorlesung: `http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/mathmod2012s/`

H9: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass

$$y(t) = e^{at} y_0 + \frac{b}{a}\left(e^{at} - 1\right)$$

für gegebene Werte $y_0 \geq 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$, die Lösung der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung ist:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) &= a y(t) + b \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Lösung:

Wir berechnen zunächst die Ableitung von $y(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{at} y_0 + \frac{b}{a}\left(e^{at} - 1\right)\right) = a y_0 e^{at} + b e^{at}$$

Nun setzten wir die Lösung in die rechte Seite der ODE ein und vergleichen mit der eben bestimmten Ableitung:

$$\begin{aligned} a y(t) + b &= a\left(e^{at} y_0 + \frac{b}{a}\left(e^{at} - 1\right)\right) + b \\ &= a y_0 e^{at} + b e^{at} - b + b = a y_0 e^{at} + b e^{at} \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass die beiden Seiten gleich sind. Somit stimmt die Behauptung.

H10: (10 Punkte)
Betrachten Sie das folgende Reaktions-System zu Entstehung und Zerfall von Ozon:

$$\begin{aligned}
O_3 &\xrightarrow{c_1} O_2 + O \\
O_2 &\xrightarrow{c_2} O + O \\
O + O_2 &\xrightarrow{c_3} O_3 \\
CFCl_3 &\xrightarrow{c_4} CFCl_2 + Cl\cdot \\
Cl \cdot + O_3 &\xrightarrow{c_5} ClO \cdot + O_2 \\
ClO \cdot + O_3 &\xrightarrow{c_6} Cl \cdot + 2O_2
\end{aligned}$$

Sei

- $y_1(t)$ die Menge an O
- $y_2(t)$ die Menge an O_2
- $y_3(t)$ die Menge an O_3
- $y_4(t)$ die Menge an Cl
- $y_5(t)$ die Menge an ClO
- $y_6(t)$ die Menge an $CFCl_3$
- $y_7(t)$ die Menge an $CFCl_2$

Wie sieht das zugehörige ODE-System aus?
(Hinweis: In der nächsten Vorlesung werden Sie das System für den Fall $c_4 = c_5 = c_6 = 0$ diskutieren. Sie können dieses System dann für den Fall $c_4 = c_5 = c_6 > 0$ erweitern.)

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_1(t) &= c_1 y_3(t) + 2c_2 y_2(t) - c_3 y_1(t) y_2(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_2(t) &= c_1 y_3(t) - c_2 y_2(t) - c_3 y_1(t) y_2(t) + c_5 y_4(t) y_3(t) + 2c_6 y_5(t) y_3(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_3(t) &= -c_1 y_3(t) + c_3 y_1(t) y_2(t) - c_5 y_4(t) y_3(t) - c_6 y_5(t) y_3(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_4(t) &= c_4 y_6(t) - c_5 y_4(t) y_3(t) + c_6 y_5(t) y_3(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_5(t) &= c_5 y_4(t) y_3(t) - c_6 y_5(t) y_3(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_6(t) &= -c_4 y_6(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_7(t) &= c_4 y_6(t)
\end{aligned}$$