Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Biol. Michael Kreim

Mathematische Modelle und numerische Methoden in der Biologie

Sommersemester 2012

5. Übungsblatt

Gruppenübung (Besprechung in der Übung am 28.06.2012)

G17:
Betrachten Sie das Reaktionssystem eines Infektionsmodelles:

$$\begin{aligned} S + I &\xrightarrow{c_1} I + I \\ I &\xrightarrow{c_2} S \\ S &\xrightarrow{c_3} S + S \\ S + S &\xrightarrow{c_4} S \end{aligned}$$

mit $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$ und $c_4 = 4$, sowie $y_1(t)$ die Menge an S und $y_2(t)$ die Menge an I.

(a) Stellen Sie die zugehörige ODE auf.

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte.

(c) Leiten Sie die Jacobi-Matrix her.

(d) Werten Sie die Jacobi-Matrix an den Gleichgewichtspunkten aus.

(e) Welche der Punkte sind instabil, welche asymptotisch stabil?

Lösung:

(a) Stellen Sie die zugehörige ODE auf:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_1(t) &= -y_1(t)y_2(t) + 4y_2(t) + 4y_1(t) - \frac{4}{2} y_1^2(t) =: f_1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_2(t) &= y_1(t)y_2(t) - 4y_2(t) =: f_2 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte:

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} -y_1(t)y_2(t) + 4y_2(t) + 4y_1(t) - 2y_1^2(t) \\ 0 &\overset{!}{=} y_1(t)y_2(t) - 4y_2(t) \end{aligned}$$

Wir sehen zunächst das $s_1 = (0, 0)$ ein Gleichgewichtspunkt ist.

Fallunterscheidung:

$\mathbf{y_1(t) = 0}$

$$0 \stackrel{!}{=} +4y_2(t)$$
$$0 \stackrel{!}{=} -4y_2(t)$$

Dies lässt sich nur erfüllen, wenn $y_2(t) = 0$, also $s_1 = (0, 0)$

$\mathbf{y_2(t) = 0}$

$$0 \stackrel{!}{=} 4y_1(t) - 2y_1^2(t) \Rightarrow y_1(t) = 2$$

Wir finden also einen weiteren Gleichgewichtspunkt bei $s_2 = (2, 0)$

$\mathbf{y_1(t) \neq 0, \ y_2(t) \neq 0}$

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} y_1(t)y_2(t) - 4y_2(t) \\ &= \Big(y_1(t) - 4\Big)y_2(t) \\ \Rightarrow 0 &\stackrel{!}{=} y_1(t) - 4 \\ \Rightarrow y_1(t) &= 4 \end{aligned}$$

Wir setzten dieses Ergebnis ein und erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} -4y_2(t) + 4y_2(t) + 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 \\ &= -16 \end{aligned}$$

Aus der Annahme $y_1(t) \neq 0$ und $y_2(t) \neq 0$ folgt also kein weitere Gleichgewichtspunkte, da $-16 \neq 0$.

(c) Leiten Sie die Jacobi-Matrix her.

$$J_f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} -y_2(t) + 4 - 4y_1(t) & -y_1(t) + 4 \\ y_2(t) & y_1(t) - 4 \end{pmatrix}$$

(d) Werten Sie die Jacobi-Matrix an den Gleichgewichtspunkten aus.

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$
$$J_f(2, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(e) Welche der Punkte sind instabil, welche asymptotisch stabil? Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der drei Matrizen mit Hilfe des charakteristischen Polynoms:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (j_{11} + j_{22})\lambda + (j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21})$$

Für $J_f(0,0)$ ergibt sich:

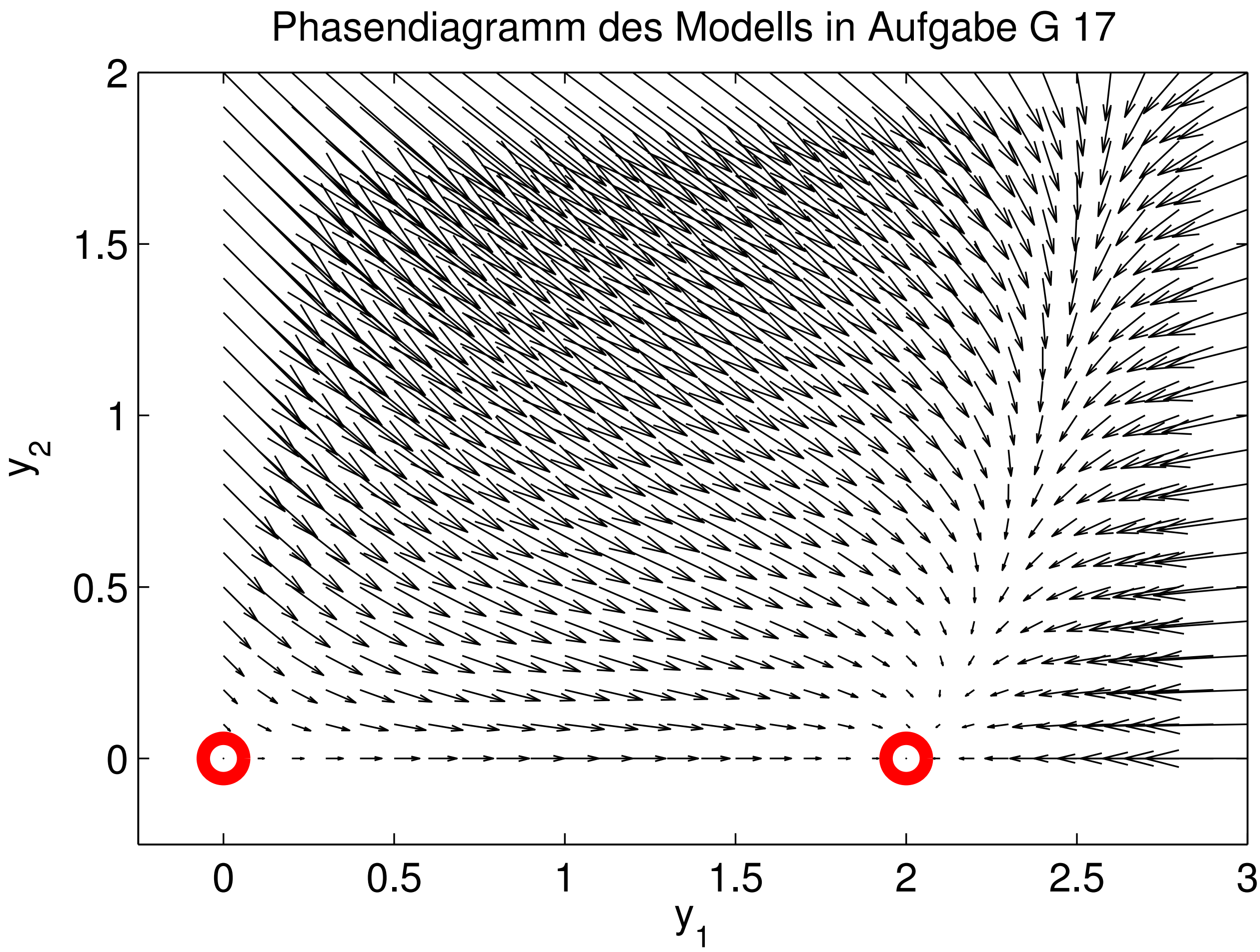
$$p_1(\lambda) = \lambda^2 - 16$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

Wir erhalten also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -4$. Da einer der Eigenwerte positiv ist, ist dieser Punkt instabil.

Für $J_f(2,0)$ ergibt sich:

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 8$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{9-8} = -3 \pm 1$$

Wir erhalten also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -4$. Da beide Eigenwerte negativ sind, ist dieser Punkt asymptotisch stabil.



Hausübung (Abgabe[1] bis zum 12.07.2012)

H13: (26 Punkte)
Betrachten Sie das Reaktionssystem eines Infektionsmodelles:

$$\begin{aligned} S + I &\xrightarrow{c_1} I + I \\ I &\xrightarrow{c_2} S \\ S &\xrightarrow{c_3} S + S \\ S + S &\xrightarrow{c_4} S \\ I &\xrightarrow{c_5} I + I \end{aligned}$$

mit $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$, $c_4 = 4$ und $c_5 = 1$, sowie $y_1(t)$ die Menge an S und $y_2(t)$ die Menge an I.

(a) Stellen Sie die zugehörige ODE auf.

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte.

(c) Leiten Sie die Jacobi-Matrix her.

(d) Werten Sie die Jacobi-Matrix an den Gleichgewichtspunkten aus.

(e) Welche der Punkte sind instabil, welche asymptotisch stabil?

Lösung:

(a) Stellen Sie die zugehörige ODE auf:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_1(t) &= -y_1(t)y_2(t) + 4y_2(t) + 4y_1(t) - \frac{4}{2}y_1^2(t) =: f_1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_2(t) &= y_1(t)y_2(t) - 4y_2(t) + y_2(t) =: f_2 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} -y_1(t)y_2(t) + 4y_2(t) + 4y_1(t) - 2y_1^2(t) \\ 0 &\stackrel{!}{=} y_1(t)y_2(t) - 4y_2(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

Wir sehen zunächst das $s_1 = (0, 0)$ ein Gleichgewichtspunkt ist.

[1] Bitte geben Sie Ihre Lösungsvorschläge für die Hausübungen bis zum 12.07.2012 bei Ihrem Übungsleiter ab oder werfen Sie sie **vor** Beginn der Übung am 12.07.2012 in den grünen Kasten in Stockwerk 1C im Allianzgebäude (Geb. 05.20, Kaiserstr. 93). Erhaltene Punkte werden auf die Klausur angerechnet. Details hierzu entnehmen Sie bitte der Webseite zur Vorlesung: `http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/mathmod2012s/`

Fallunterscheidung:

$\mathbf{y_1(t) = 0}$

$$0 \stackrel{!}{=} +4y_2(t)$$
$$0 \stackrel{!}{=} -4y_2(t) + y_2(t)$$

Dies lässt sich nur erfüllen, wenn $y_2(t) = 0$, also $s_1 = (0, 0)$

$\mathbf{y_2(t) = 0}$

$$0 \stackrel{!}{=} +4y_1(t) - 2y_1^2(t) \qquad \Rightarrow y_1(t) = \frac{4}{2} = 2$$

Wir finden also einen weiteren Gleichgewichtspunkt bei $s_2 = (2, 0)$

$\mathbf{y_1(t) \neq 0},\ \mathbf{y_2(t) \neq 0}$

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} y_1(t)y_2(t) - 4y_2(t) + y_2(t) \\ &= \Big(y_1(t) - 4 + 1\Big)y_2(t) \\ \Rightarrow 0 &\stackrel{!}{=} y_1(t) - 3 \\ \Rightarrow y_1(t) &= 3 \end{aligned}$$

Wir setzten dieses Ergebnis ein und erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} -3y_2(t) + 4y_2(t) + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 \\ &= y_2(t) - 6 \\ \Rightarrow y_2(t) &= 6 \end{aligned}$$

Wir finden also einen weiteren Gleichgewichtspunkt bei $s_3 = (3, 6)$

(c) Leiten Sie die Jacobi-Matrix her.

$$J_f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} -y_2(t) + 4 - 4y_1(t) & -y_1(t) + 4 \\ y_2(t) & y_1(t) - 3 \end{pmatrix}$$

(d) Werten Sie die Jacobi-Matrix an den Gleichgewichtspunkten aus.

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$
$$J_f(2,0) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$J_f(3,6) = \begin{pmatrix} -14 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) Welche der Punkte sind instabil, welche asymptotisch stabil? Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der drei Matrizen mit Hilfe des charakteristischen Polynoms:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (j_{11} + j_{22})\lambda + (j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21})$$

Für $J_f(0,0)$ ergibt sich:

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 12$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$$

Wir erhalten also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -3$. Da einer der Eigenwerte positiv ist, ist dieser Punkt instabil.

Für $J_f(2,0)$ ergibt sich:

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

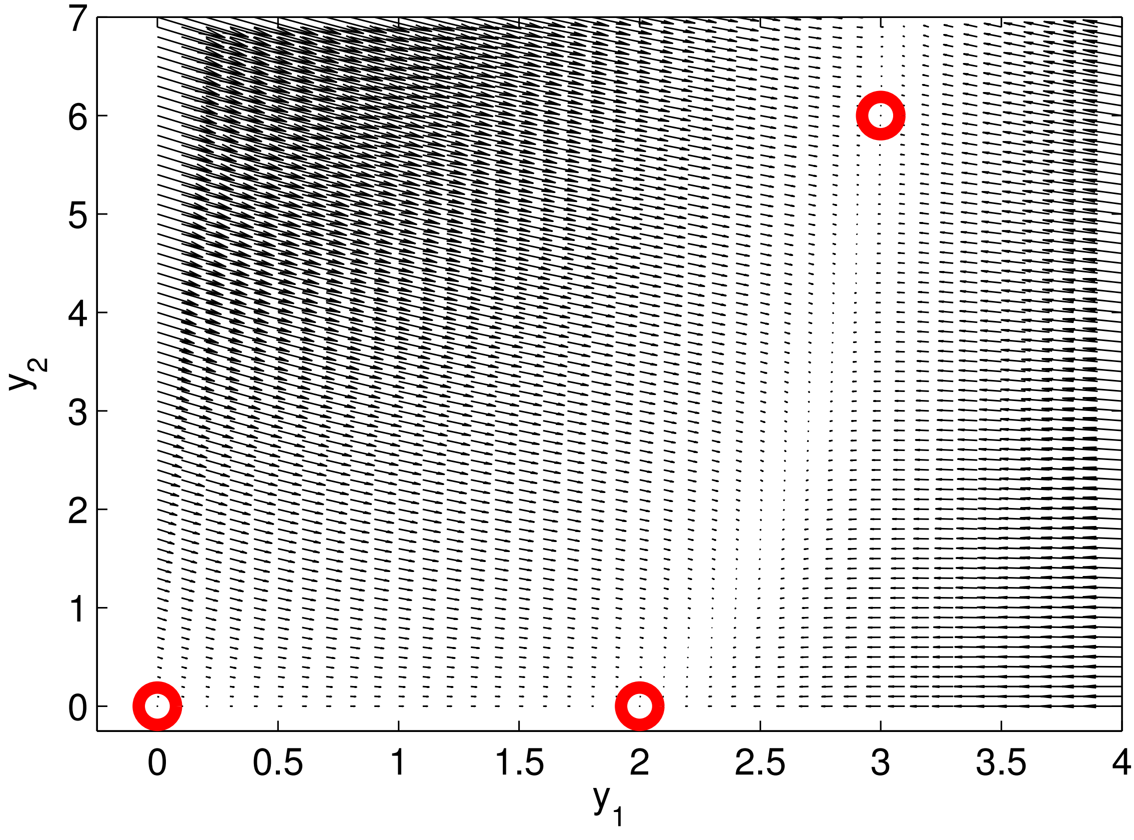
Wir erhalten also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -4$. Da beide Eigenwerte negativ sind, ist dieser Punkt asymptotisch stabil.

Für $J_f(3,6)$ ergibt sich:

$$p_3(\lambda) = \lambda^2 + 14\lambda - 6$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -7 \pm \sqrt{49 + 6} = -7 \pm \sqrt{55}$$

Wir erhalten also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = \sqrt{55} - 7 \approx 0.41$ und $\lambda_2 = -\sqrt{55} - 7 \approx -14.41$. Da einer der Eigenwerte positiv ist, ist dieser Punkt instabil.

Phasendiagramm des Modells in Aufgabe H 13



Bitte beachten Sie: Dies wird die letzte Hausübung für diese Veranstaltung sein. Es gab somit insgesamt 120 Hausübungspunkte zu erreichen.