Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Biol. Michael Kreim

Mathematische Modelle und numerische Methoden in der Biologie

Sommersemester 2012

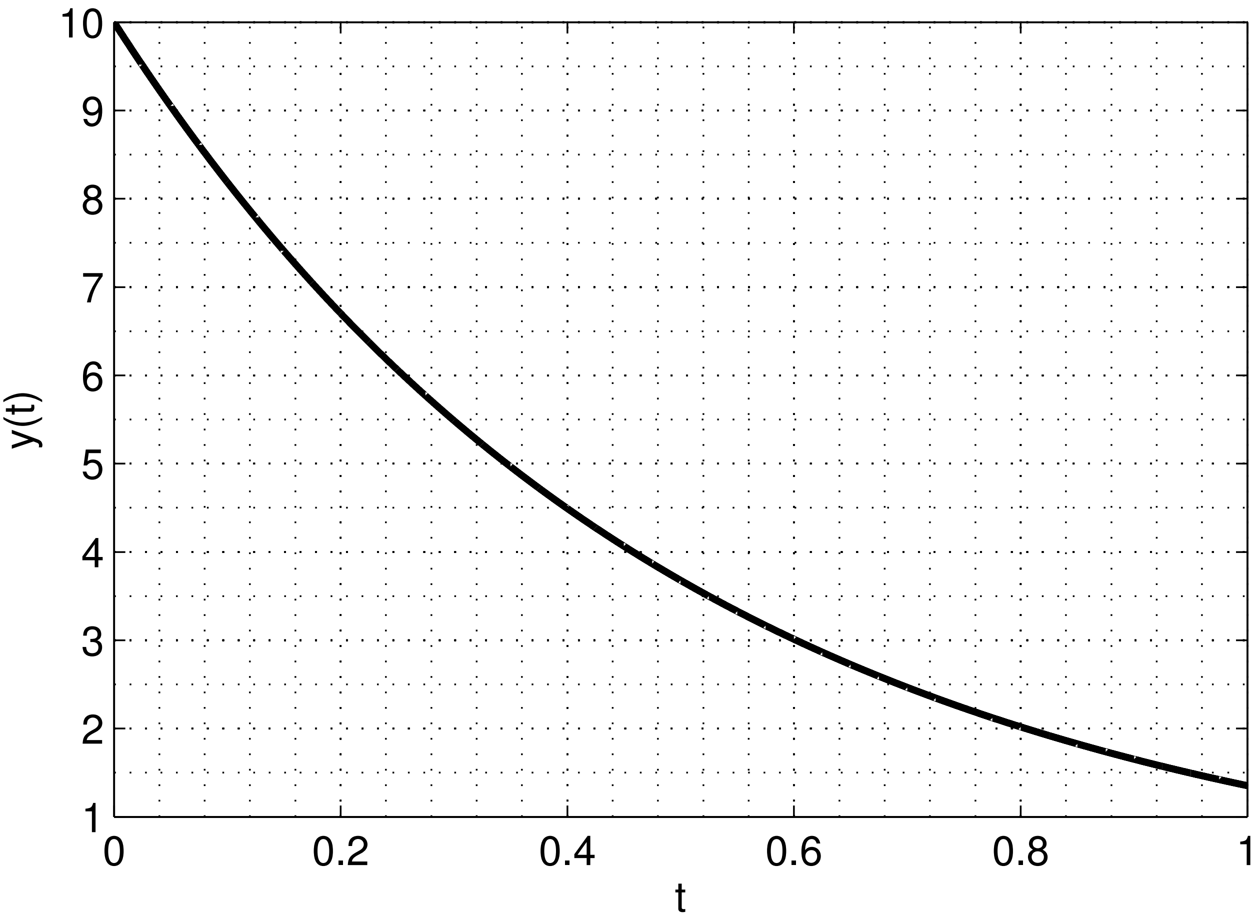
6. und letztes Übungsblatt

Gruppenübung (Besprechung in der Übung am 12.07.2012)

G18:
Betrachten Sie das AWP

$$\frac{\mathrm{d}}{dt}y(t) = -2 \cdot y(t)$$
$$y(0) = 10.$$

Berechnen Sie eine numerische Lösung dieses Problems mit dem expliziten Euler-Verfahren mit den Schrittweiten $h = 0.5$ und $h = 0.25$ auf dem Zeitintervall $[0, 1]$. In der folgenden Grafik ist die exakte Lösung des AWPs aufgetragen. Tragen Sie die numerische Lösung ebenfalls in die Abbildung ein und vergleichen Sie die Lösungen.



Lösung:
Das explizite Euler-Verfahren lautet:

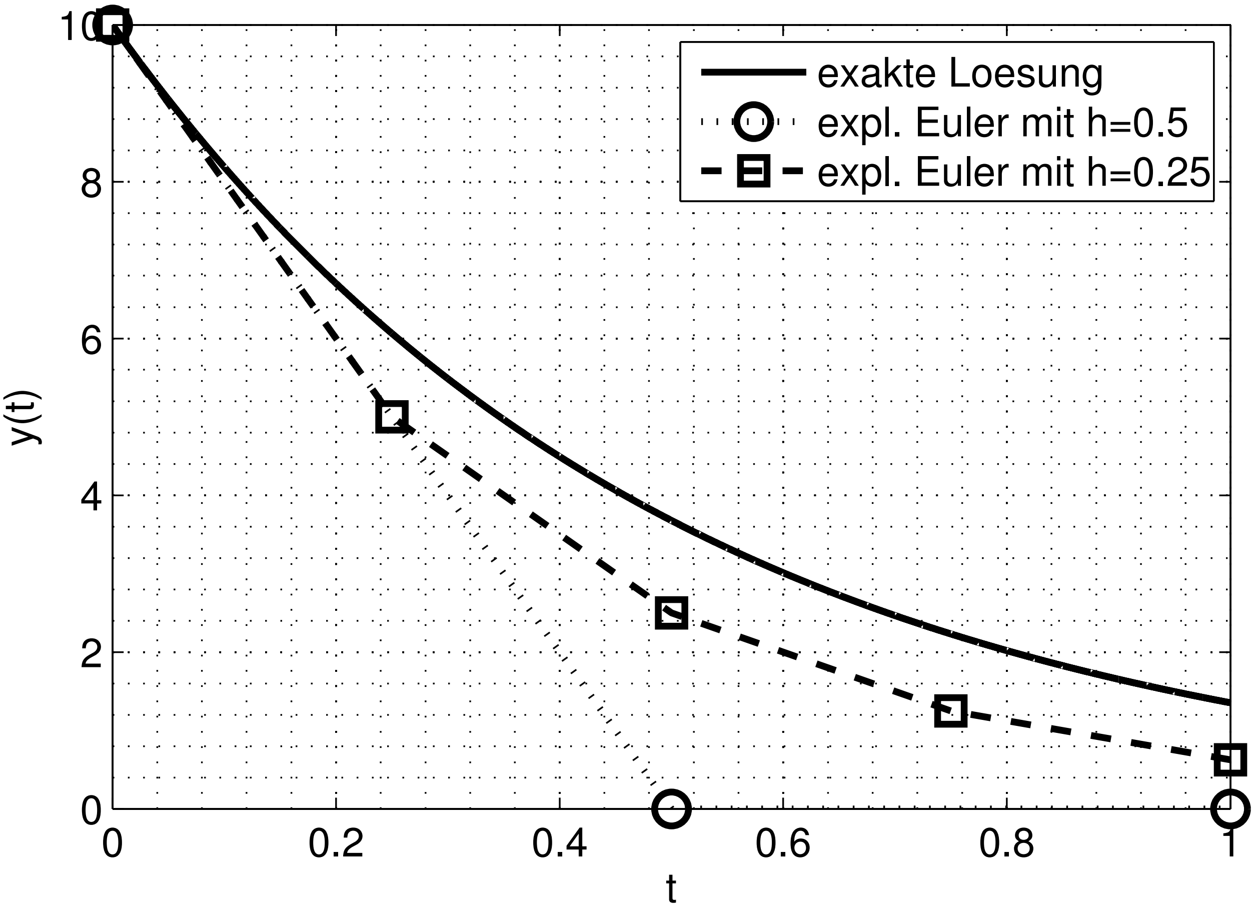
$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(y_n)$$

wobei sich $f(y_n)$ hier aus der rechten Seite des AWPs ergibt:

$$f(y_n) = -2 \cdot y_n$$

Dadurch ergeben sich die folgenden Approximationen y_i für die beiden gegebenen Schrittweiten

$y_0 = 10$	$y_1 = 0$	$y_2 = 0$			für $h = 0.5$
$y_0 = 10$	$y_1 = 5$	$y_2 = 2.5$	$y_3 = 1.25$	$y_4 = 0.625$	für $h = 0.25$



G19:
Betrachten Sie die θ-Methode definiert durch die Verfahrensvorschrift

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \theta h, (1-\theta)y_n + \theta y_{n+1}\right), \qquad \theta \in [0,1]$$

zur Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\mathrm{d}}{dt}y(t) = f(t, y(t)), \qquad t \geq 0, \qquad y(0) = y_0.$$

Bestimmen Sie die Parameterwerte von θ, für die das Verfahren A-stabil ist.

Lösung:
Ein numerisches Verfahren zur Lösung des AWPs

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{dt}y(t) &= f(t, y(t)) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

heißt A-stabil, falls die Approximationen y_n im Spezialfall

$$f(y(t)) = \lambda y(t), \qquad \lambda < 0, \qquad y_0 = 1$$

für jede beliebige Schrittweite h und jedes $n \in \mathbb{N}$ im Intervall $[-1,1]$ liegen, d.h. $y_n \in [-1,1]$ für alle $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Um dies zu zeigen, setzen wir zunächst die DGL in die Verfahrensvorschrift ein:

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + h\lambda\left((1-\theta)y_{n-1} + \theta y_n\right) \\ \Leftrightarrow (1 - h\lambda\theta)\, y_n &= (1 + h\lambda\,(1-\theta))\, y_{n-1} \\ \Leftrightarrow y_n &= (1 - h\lambda\theta)^{-1}\,(1 + h\lambda\,(1-\theta))\, y_{n-1} \end{aligned}$$

Die numerische Lösung bleibt also genau dann im Intervall $[-1,1]$, wenn

$$\begin{aligned} \left|(1 - h\lambda\theta)^{-1}\,(1 + h\lambda\,(1-\theta))\right| &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \left|(1 - h\lambda\theta)^{-1}\right|\,|(1 + h\lambda\,(1-\theta))| &\leq 1 \\ \Leftrightarrow |(1 + h\lambda\,(1-\theta))| &\leq |(1 - h\lambda\theta)| \end{aligned}$$

da $(1 - h\lambda\theta) > 0$ für alle $h, \theta > 0$ und $\lambda < 0$.

Wir quadrieren um den Betrag loszuwerden und erhalten:

$$\begin{aligned} |1 + h\lambda(1-\theta)| &\leq |1 - h\lambda\theta| \\ \Leftrightarrow (1 + h\lambda(1-\theta))^2 &\leq (1 - h\lambda\theta)^2 \\ \Leftrightarrow 1 + 2h\lambda(1-\theta) + (h\lambda(1-\theta))^2 &\leq 1 - 2h\lambda\theta + (h\lambda\theta)^2 \\ \Leftrightarrow 1 + 2h\lambda - 2h\lambda\theta + (h\lambda - h\lambda\theta)^2 &\leq 1 - 2h\lambda\theta + (h\lambda\theta)^2 \\ \Leftrightarrow 1 + 2h\lambda - 2h\lambda\theta + (h\lambda)^2 - 2h^2\lambda^2\theta + (h\lambda\theta)^2 &\leq 1 - 2h\lambda\theta + (h\lambda\theta)^2 \end{aligned}$$

und können nun kürzen und umstellen (wobei wir beachten müssen, dass $h > 0$ und $\lambda < 0$:

$$
\begin{aligned}
1 + 2h\lambda - 2h\lambda\theta + (h\lambda)^2 - 2h^2\lambda^2\theta + (h\lambda\theta)^2 &\leq 1 - 2h\lambda\theta + (h\lambda\theta)^2 \\
\Leftrightarrow 2h\lambda - 2h\lambda\theta + (h\lambda)^2 - 2h^2\lambda^2\theta &\leq -2h\lambda\theta \\
\Leftrightarrow 2h\lambda + (h\lambda)^2 - 2h^2\lambda^2\theta &\leq 0 \\
\Leftrightarrow h\lambda\,(2 + h\lambda - 2h\lambda\theta) &\leq 0 \\
\Leftrightarrow 2 + h\lambda - 2h\lambda\theta &\geq 0 \\
\Leftrightarrow 2 + h\lambda &\geq 2h\lambda\theta \\
\Leftrightarrow \frac{2 + h\lambda}{2h\lambda} &\leq \theta \\
\Leftrightarrow \frac{1}{h\lambda} + \frac{1}{2} &\leq \theta
\end{aligned}
$$

Da $\frac{1}{h\lambda} < 0$ ist die Verfahrensvorschrift A-stabil, wenn $\theta \geq \frac{1}{2}$.