Phasendiagramme und stationäre Punkte

Tobias Jahnke

Karlsruher Institut für Technologie

Vorlesung *Quantitative Biologie*

Sommersemester 2012

Beispiel: Räuber-Beute-Modell

Räuber-Beute-Modell aus 2.2:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) - y_1^2(t) + y_1(t)y_2(t) &&= f_1(y_1(t), y_2(t)) \\ y_2'(t) &= 5y_2(t) - 2y_2^2(t) - y_1(t)y_2(t) &&= f_2(y_1(t), y_2(t)) \end{aligned}$$

$y_1(t)$ Anzahl der Räuber, $y_2(t)$ Anzahl der Beutetiere

Äquivalente Schreibweise:

$$y'(t) = f(y(t))$$

Idee

Wenn die Lösung den Punkt $y(t) = x$ erreicht, so gibt die Ableitung

$$y'(t) = f(y(t)) = f(x)$$

an, in welche Richtung die Lösung danach "geht".

Idee

Wenn die Lösung den Punkt $y(t) = x$ erreicht, so gibt die Ableitung

$$y'(t) = f(y(t)) = f(x)$$

an, in welche Richtung die Lösung danach "geht".
Man kann also einen groben Eindruck der Lösung erhalten, wenn man an verschiedenen Punkten $x \in \mathbb{R}^2$ den Vektor $L \cdot f(x) \in \mathbb{R}^2$ als Pfeil einzeichnet. Dabei ist $L > 0$ ein Skalierungsparameter, z.B. $L = 0.1$.

Idee

Wenn die Lösung den Punkt $y(t) = x$ erreicht, so gibt die Ableitung

$$y'(t) = f(y(t)) = f(x)$$

an, in welche Richtung die Lösung danach "geht".
Man kann also einen groben Eindruck der Lösung erhalten, wenn man an verschiedenen Punkten $x \in \mathbb{R}^2$ den Vektor $L \cdot f(x) \in \mathbb{R}^2$ als Pfeil einzeichnet. Dabei ist $L > 0$ ein Skalierungsparameter, z.B. $L = 0.1$.

Beispiele:

- Für $x = \binom{1}{1}$ ist $f(x) =$

Idee

Wenn die Lösung den Punkt $y(t) = x$ erreicht, so gibt die Ableitung

$$y'(t) = f(y(t)) = f(x)$$

an, in welche Richtung die Lösung danach "geht".
Man kann also einen groben Eindruck der Lösung erhalten, wenn man an verschiedenen Punkten $x \in \mathbb{R}^2$ den Vektor $L \cdot f(x) \in \mathbb{R}^2$ als Pfeil einzeichnet. Dabei ist $L > 0$ ein Skalierungsparameter, z.B. $L = 0.1$.

Beispiele:

- Für $x = \binom{1}{1}$ ist $f(x) = \binom{2}{2}$.
  Zeichne also an der Stelle $\binom{1}{1}$ einen Pfeil in Richtung $\binom{0.2}{0.2}$.

Idee

Wenn die Lösung den Punkt $y(t) = x$ erreicht, so gibt die Ableitung

$$y'(t) = f(y(t)) = f(x)$$

an, in welche Richtung die Lösung danach "geht".
Man kann also einen groben Eindruck der Lösung erhalten, wenn man an verschiedenen Punkten $x \in \mathbb{R}^2$ den Vektor $L \cdot f(x) \in \mathbb{R}^2$ als Pfeil einzeichnet. Dabei ist $L > 0$ ein Skalierungsparameter, z.B. $L = 0.1$.

Beispiele:

- Für $x = \binom{1}{1}$ ist $f(x) = \binom{2}{2}$.
  Zeichne also an der Stelle $\binom{1}{1}$ einen Pfeil in Richtung $\binom{0.2}{0.2}$.
- Für $x = \binom{2}{3}$ ist $f(x) =$

Idee

Wenn die Lösung den Punkt $y(t) = x$ erreicht, so gibt die Ableitung

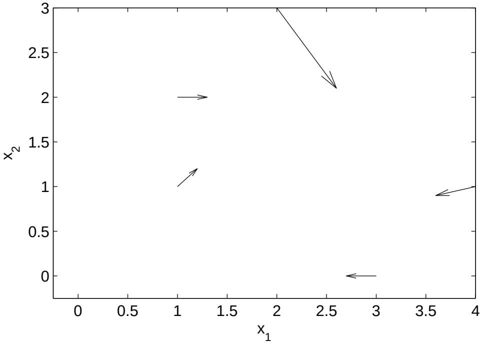
$$y'(t) = f(y(t)) = f(x)$$

an, in welche Richtung die Lösung danach "geht".
Man kann also einen groben Eindruck der Lösung erhalten, wenn man an verschiedenen Punkten $x \in \mathbb{R}^2$ den Vektor $L \cdot f(x) \in \mathbb{R}^2$ als Pfeil einzeichnet. Dabei ist $L > 0$ ein Skalierungsparameter, z.B. $L = 0.1$.

Beispiele:

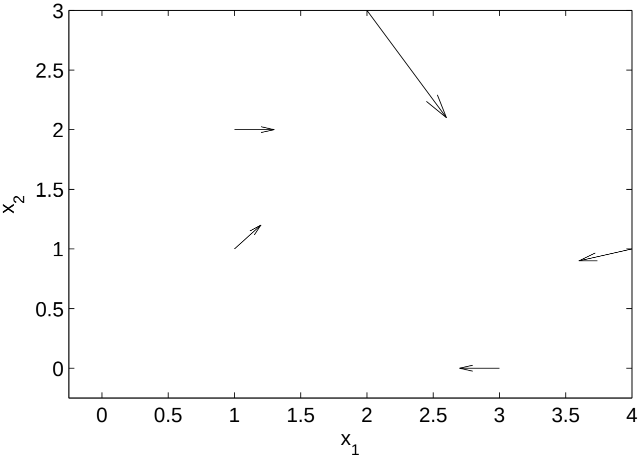
- Für $x = \binom{1}{1}$ ist $f(x) = \binom{2}{2}$.
  Zeichne also an der Stelle $\binom{1}{1}$ einen Pfeil in Richtung $\binom{0.2}{0.2}$.
- Für $x = \binom{2}{3}$ ist $f(x) = \binom{6}{-9}$.
  Zeichne also an der Stelle $\binom{2}{3}$ einen Pfeil in Richtung $\binom{0.6}{-0.9}$.

Idee

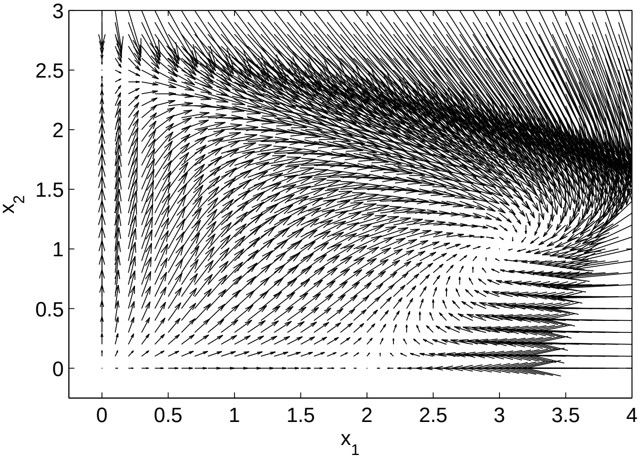


Beispiele:

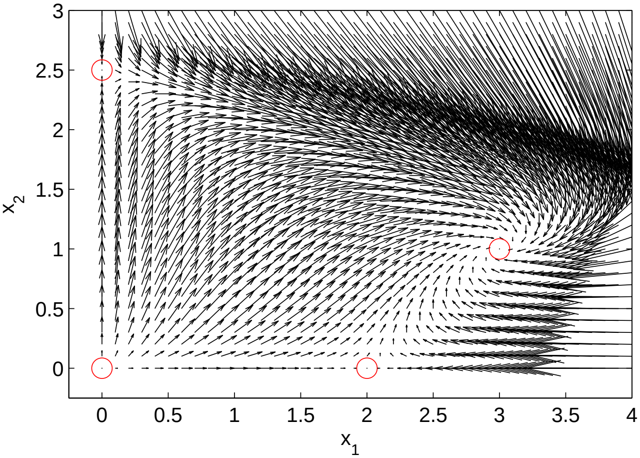
- Für $x = \binom{1}{1}$ ist $f(x) = \binom{2}{2}$.
  Zeichne also an der Stelle $\binom{1}{1}$ einen Pfeil in Richtung $\binom{0.2}{0.2}$.
- Für $x = \binom{2}{3}$ ist $f(x) = \binom{6}{-9}$.
  Zeichne also an der Stelle $\binom{2}{3}$ einen Pfeil in Richtung $\binom{0.6}{-0.9}$.



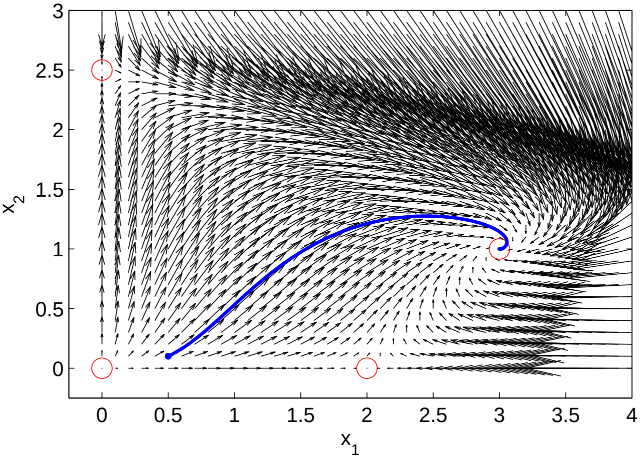
Wenn man dies für sehr viele Punkte tut, erhält man...



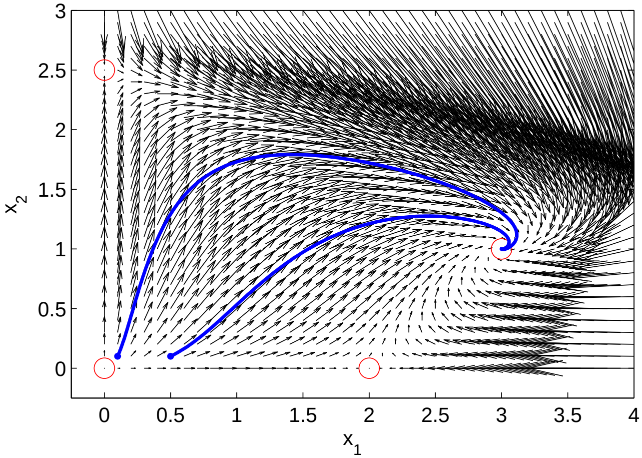
...das Phasendiagramm.



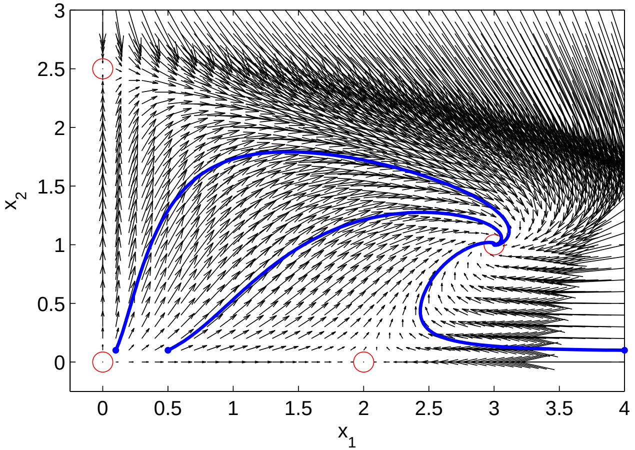
Beobachtung: An manchen Stellen (rote Kreise) gibt es keine Pfeile, weil hier $f(x) = \binom{0}{0}$ ist.



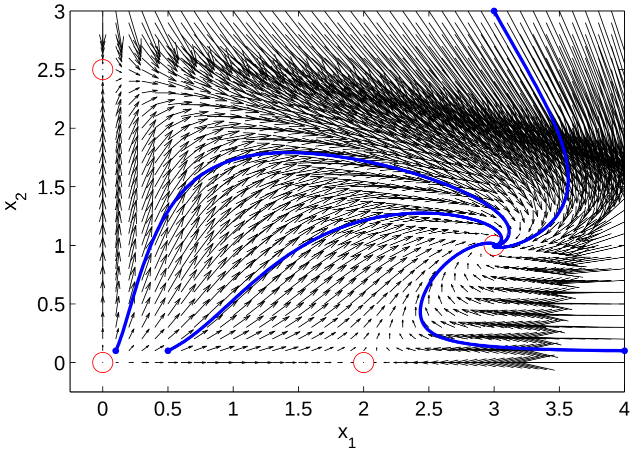
Die Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten folgen dem Vektorfeld.



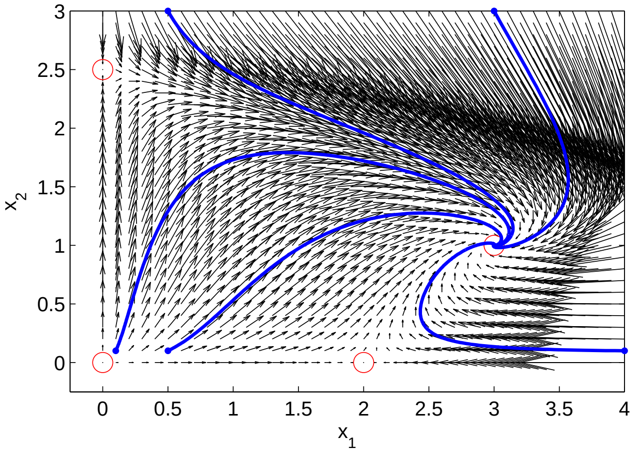
Die Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten folgen dem Vektorfeld.



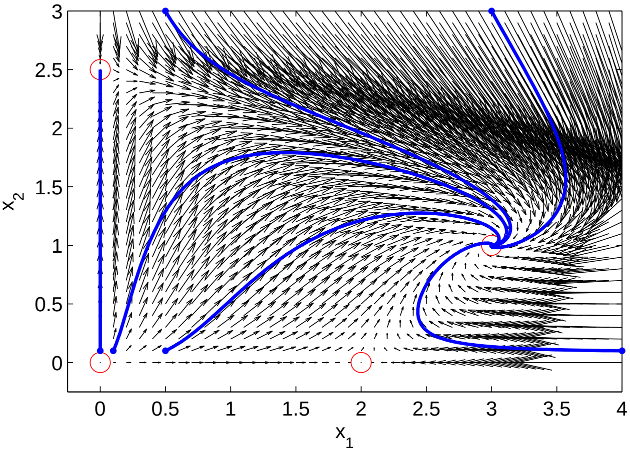
Die Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten folgen dem Vektorfeld.



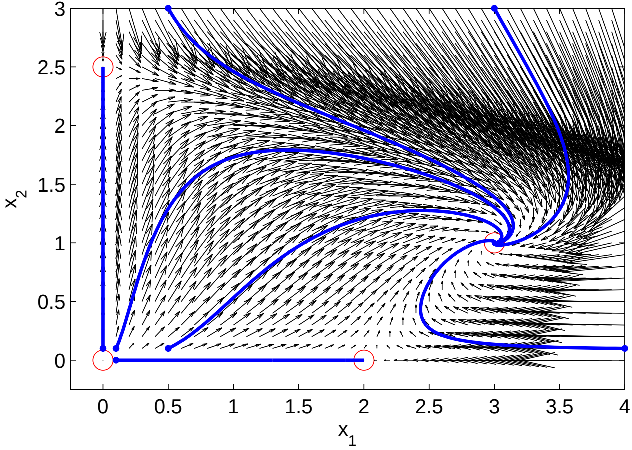
Die Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten folgen dem Vektorfeld.



Die Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten folgen dem Vektorfeld.



Die Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten folgen dem Vektorfeld.



Die Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten folgen dem Vektorfeld.

Phasendiagramme und stationäre Punkte

Tobias Jahnke

Karlsruher Institut für Technologie

Vorlesung *Quantitative Biologie*

Sommersemester 2012