Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte
und Numerische Mathematik

Mathematik II für die Fachrichtung Informationswirtschaft
Sommersemester 2009

PD Dr. Nicolas Neuß, Dipl.-Math. Wolfgang Müller

2. Übungsblatt 4. Mai 2009

Aufgabe 1: (3 Punkte) Wir bezeichnen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$, d.h. es gelten die Eigenschaften

1.) Definitheit: $\langle x, x \rangle > 0$ für $x \neq 0$

2.) Sesquilinearität: $\langle x + \alpha y, u + \beta v \rangle = \langle x, u \rangle + \alpha \langle y, u \rangle + \bar{\beta} \langle x, v \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle y, v \rangle$

3.) Symmetrie: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Sei nun $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie, dass auch $\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, Ay \rangle$ ein Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$ definiert.

Aufgabe 2: (2 Punkte) Seien $O \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $O^*O = I_{n \times n}$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $A^* = A$. Beweisen Sie die beiden Aussagen:

a) Die Eigenwerte der unitären Matrix O liegen auf dem komplexen Einheitskreis.

b) Die Eigenwerte der hermiteschen Matrix A liegen auf der reellen Achse.

Aufgabe 3: (6 Punkte) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen (in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}^2$):

a) $x_n = 4 - (-1)^n$

b) $x_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{3n^2 - 1}$

c) $x_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -2 + \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

d) $x_n = i^n$

e) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

f) $x_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

a) $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-1}$

b) $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow \infty} e^{-n} \sin(n)$

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert x^* und geben Sie in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, sodass $d(x_n, x^*) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
Hinweis: n_0 muss nicht optimal sein.

Aufgabe 5: (2 Bonuspunkte) Sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Diskutieren Sie die Häufungspunkte der Folge

$$x_n = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Website zur Vorlesung: *http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/mi2inwi2009s*
Abgabe: Werfen Sie Ihre Löungen bis zum **11.05.2009**, **11.30 Uhr** in den Einwurfschlitz „Mathematik für Informationswirte“ im Treppenhaus des Mathematik-Gebäudes, 1. OG, gegenüber von Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Gruppe (A-D) und Ihre/n Tutor/-in.