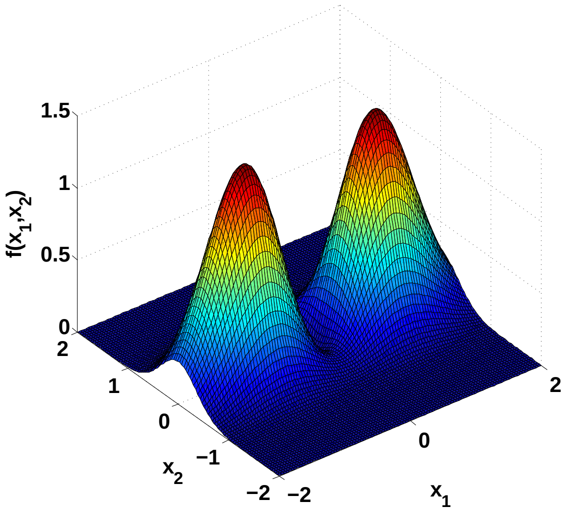

Abbildung 1: Schaubild der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; f(x_1, x_2) = (4x_1^2 + x_2^2)\, e^{-x_1^2 - 4x_2^2}$.

Aufgabe 3: (3 Bonuspunkte) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; f(x_1, x_2) = (4x_1^2 + x_2^2)\, e^{-x_1^2 - 4x_2^2}$$

und charakterisieren Sie diese Punkte soweit möglich.

Lösung: Wir erhalten für die partiellen Ableitungen mithilfe der Produkt- bzw. Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \big(8x_1 + (4x_1^2 + x_2^2)(-2x_1)\big)\, e^{-x_1^2 - 4x_2^2} = 2\, e^{-x_1^2 - 4x_2^2}\, (4 - 4x_1^2 - x_2^2)\, x_1 \;, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \big(2x_2 + (4x_1^2 + x_2^2)(-8x_2)\big)\, e^{-x_1^2 - 4x_2^2} = 2\, e^{-x_1^2 - 4x_2^2}\, (1 - 16x_1^2 - 4x_2^2)\, x_2 \;. \tag{1b}$$

Kritische Punkte erfüllen die Bedingung $\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0)^T$. Wir suchen daher alle Paare $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\Big((4 - 4x_1^2 - x_2^2)\, x_1 = 0\Big) \wedge \Big((1 - 16x_1^2 - 4x_2^2)\, x_2 = 0\Big) \;.$$

Es ergeben sich drei Fälle:

i) $x_1 = x_2 = 0 \iff K_1(0, 0)$,

ii) $x_1 = 0$ und $1 - 16x_1^2 - 4x_2^2 = 0 \iff K_2(0, 0.5)$ oder $K_3(0, -0.5)$

iii) $x_2 = 0$ und $4 - 4x_1^2 - x_2^2 = 0 \iff K_4(1, 0)$ oder $K_5(-1, 0)$

mit insgesamt fünf kritischen Punkten $K_1, \dots, K_5$. Nun berechnen wir für jeden dieser Punkte die entsprechende Hessematrix, dabei ist die Eigenschaft $f(x_1, -x_2) = f(x_1, x_2) = f(-x_1, x_2)$ nützlich. Für die zweiten partiellen Ableitungen von (1a) und (1b), benötigen wir nur einen Summanden der "dreifachen Produktregel", da immer zwei verschwinden.

Für K_1 erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(0,0) &= 2\, e^{-0^2-4\cdot 0^2}\ (4 - 4\cdot 0^2 - 0^2) = 8\ , \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) &= 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0)\ , \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(0,0) &= 2\, e^{-0^2-4\cdot 0^2}\ (1 - 16\cdot 0^2 - 4\cdot 0^2) = 2
\end{aligned}$$

die Hesse-Matrix $H(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, diese ist positiv definit, also hat f bei $\underline{K_1 \text{ ein lokales Minimum}}$.
Für K_2 bzw. K_3 erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(0,\pm 0.5) &= 2\, e^{-0^2-4\cdot 0.5^2}\ (4 - 4\cdot 0^2 - 0.5^2) = 7.5\, e^{-1}\ , \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,\pm 0.5) &= 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,\pm 0.5)\ , \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(0,\pm 0.5) &= 2\, e^{-0^2-4\cdot 0.5^2}\ (-8\cdot 0.5)\cdot 0.5 = -4e^{-1}
\end{aligned}$$

die Hesse-Matrix $H(0,\pm 0.5) = \begin{pmatrix} 7.5\, e^{-1} & 0 \\ 0 & -4\, e^{-1} \end{pmatrix}$, diese hat einen positiven und einen negativen Eigenwert, also hat f bei $\underline{K_2 \text{ bzw. } K_3 \text{ einen Sattelpunkt}}$.
Für K_4 bzw. K_5 erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\pm 1,0) &= 2\, e^{-1^2-4\cdot 0^2}\ (-8\cdot 1)\cdot 1 = -16e^{-1}\ , \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\pm 1,0) &= 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\pm 1,0)\ , \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\pm 1,0) &= 2\, e^{-1^2-4\cdot 0^2}\ (1 - 16\cdot 1^2 - 4\cdot 0^2) = -30e^{-1}\ .
\end{aligned}$$

die Hesse-Matrix $H(\pm 1,0) = \begin{pmatrix} -16\, e^{-1} & 0 \\ 0 & -30\, e^{-1} \end{pmatrix}$, diese ist negativ definit, also hat f bei $\underline{K_4 \text{ bzw. } K_5 \text{ ein lokales Maximum}}$.
In Abbildung 1 ist das Schaubild der Funktion f dargestellt.