Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Prof. Dr. Tobias Jahnke 18.02.2016

Numerische Mathematik 2
(Wintersemester 2015/16)

Aufgabenblatt

Aufgabe 1 (5+3+1+3 Punkte)

Sei die Funktion $\Phi\colon [1,2]^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ 1 + \frac{1}{6}(x+y) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie mithilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass Φ genau einen Fixpunkt besitzt. Dabei sei $\mathbb{R}^2$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ versehen.

(b) Geben Sie allgemein für eine einmal stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Schritte des Algorithmus des Newton-Verfahrens in Pseudo-Code an, um ausgehend von $z_k \in \mathbb{R}^n$ die nächste Iterierte $z_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ zu berechnen.

(c) Geben Sie konkret eine Funktion f an, mit welcher der Fixpunkt von Φ über das Newton-Verfahren berechnet werden kann.

(d) Beschreiben Sie, welche Vereinfachung beim vereinfachten Newton-Verfahren durchgeführt wird. Nennen Sie zudem einen Vorteil und einen Nachteil des vereinfachten Newton-Verfahrens im Vergleich zum normalen Newton-Verfahren.

Aufgabe 2 (8+3 Punkte)

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Weiter habe A genau $k \le n$ paarweise verschiedene Eigenwerte.

(a) Zeigen Sie, dass das CG-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ (bei exakter Arithmetik) die exakte Lösung $\widehat{x}$ nach k Schritten liefert.
Hinweis: Verwenden Sie eine Fehlerabschätzung für die m-te Iterierte x_m des CG-Verfahrens.

(b) Nennen Sie die wesentlichen Eigenschaften, welche von einer Vorkonditionierungsmatrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für das CG-Verfahren verlangt werden.

Aufgabe 3 (4+5+4 Punkte)

Der folgende MATLAB-Code soll das GMRES Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ ausführen.

```
1  function x = my_gmres(A, b, tol, x0)
2  % ------------------------------------------------------------
3  % INPUT     A     -   Matrix
4  %           b     -   Vektor
5  %           x0    -   Startwert
6  %           tol   -   Toleranz
7  % OUTPUT    x     -   Approximation an Ax = b
8  % ------------------------------------------------------------
9  n = length(b); m=0;
10 V = zeros(n, m+1); H = zeros(m+1,m);
11 r = b - A*x0;
12 beta = norm(r);
13 V(:,1) = r/beta;
14 ResVec = 1;
15 while ResVec(end) > tol
16   m = m+1;
17   % Arnoldi ------------------------------------------
18   v_mp1 = A* V(:,m);
19   for j = 1:m
20     H(j,m) = V(:,j)'*v_mp1;
21     v_mp1 = v_mp1 - H(j,m)*V(:,j);
22   end
23   H(m+1,m) = norm(v_mp1);
24   V(:, m+1) = v_mp1/H(m+1,m);
25   % -------------------------------------------------------
26   [Q, R] = qr(H); Q = Q';
27   ResVec(m+1) = abs(Q(m+1,1));
28 end
29 % Berechnung der Naeherungsloesung -----------
30 -
31 -
```

Um ein lauffähiges, korrektes Programm zu erhalten, muss in den Zeilen 30 und 31 noch die Näherungslösung $\mathtt{x}$ berechnet werden.

(a) Geben Sie an, was in den Zeilen 30 und 31 stehen muss, um das GMRES Verfahren korrekt zu programmieren.

(b) Zur iterativen Lösung linearer Gleichungssysteme kann sowohl GMRES (generalized minimal residual method) als auch FOM (full orthogonalization method) eingesetzt werden.

  (i) Nennen Sie die zentrale Gemeinsamkeit in der Konstruktion beider Verfahren.

  (ii) Beschreiben Sie den zentralen Unterschied beider Verfahren, indem Sie die unterschiedlichen Ansätze zur Charakterisierung der Iterierten y_m erklären.

(c) In der Praxis kann GMRES häufig nicht in der angegebenen Form durchgeführt werden, statt dessen wird die Variante GMRES(k) verwendet - das GMRES-Verfahren mit Restarts.

Erläutern Sie zwei Aspekte, aufgrund derer Restarts manchmal sinnvoll sind. Geben Sie außerdem an, welche zentrale Eigenschaft der Iterierten x_m durch die Restarts verloren geht.

Aufgabe 4

(8+3+5 Punkte)

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 0 & -20 & 3 \\ 1 & 3 & -28 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie mithilfe des Satz von Gershgorin, dass für die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 von A gilt:

$$\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(\lambda_k) = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3.$$

Dabei ist $\mathrm{Re}(\lambda_k)$ der Realteil und $\mathrm{Im}(\lambda_k)$ der Imaginärteil von λ_k.
Hinweis: Die Eigenwerte sollen **nicht** berechnet werden.

(b) Sei nun $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine andere Matrix. In jedem der Intervalle $[-3, 3]$, $[-21, -18]$ und $[-30, -24]$ liege genau ein Eigenwert von B.

Bestimmen Sie die minimale und maximale Konvergenzgeschwindigkeit der Eigenwertapproximation durch die Potenzmethode angewandt auf B.

(c) Sei nun $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Ein Nachteil der Potenzmethode ist, dass man mit ihr nur den betragsmäßig größten Eigenwert von M approximieren kann.

Erläutern Sie, wie und warum durch die inverse Potenzmethode mit Shift ein beliebiger Eigenwert λ_j approximiert werden kann. Geben Sie zusätzlich die Konvergenzgeschwindigkeit der inversen Potenzmethode in Abhängigkeit des Shifts μ an.

Aufgabe 5

(5+5 Punkte)

(a) Formulieren Sie für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ den QR-Algorithmus mit Shifts in seiner naiven Version in Pseudo-Code.

(b) Im Gegensatz zu (a) ist die effiziente Implementierung des QR-Algorithmus mit Shifts oder mehrfachen Shifts eine Herausforderung.

Nennen Sie zwei zentrale Ideen, mit welchen man den Aufwand des Algorithmus entscheidend reduzieren kann. Beschreiben Sie zusätzlich jeweils kurz, wieso der Aufwand dadurch reduziert wird.