Name: Matrikelnummer:

Aufgabe: 1

a)

- $[1,2]^2$ abgeschl. TM des $\mathbb{R}^2$

- Φ ist Selbstabb.

Für $x, y \in [1,2]$ gilt

$$1 \leq \sqrt{x} \leq 2$$

$$1 \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{6}(x+y)}_{\substack{\geq 0 \\ \leq \frac{2}{3}}} \leq 1 + \frac{2}{3} \leq 2$$

- Kontraktion

$$\Phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \Phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{3} \right\} \leq \frac{1}{2} < 1$$

$\overset{\text{BFPS}}{\Rightarrow}$ Φ hat genau einen FP

b)

Berechne $f(z_k)$ und $f'(z_k)$

Löse Lgs $f'(z_k)\, \Delta z_k = -f(z_k)$

setze $z_{k+1} = z_k + \Delta z_k$

c)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x} - x \\ 1 + \frac{1}{6}(x+y) - y \end{pmatrix}$$

d) Anstatt $f'(z_k)$ in jedem Schritt neu zu berechnen, halte den Wert konstant, z B $A = f'(z_0)$.

Vorteil: Nur eine LR-Zerlegung nötig

Nachteil: lokal lineare statt lokal quadratische Konvergenz

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe: 2

a) Es gilt die Fehlerabschätzung

$$\| x_m - \hat{x} \|_A \leq \min_{\substack{P_m \in \mathcal{P}_m \\ P_m(0)=1}} \max_{\lambda \in \lambda(A)} |P_m(\lambda)| \; \| x_0 - \hat{x} \|_A$$

Betrachte

$$p(\lambda) = (-1)^k \prod_{i=1}^{k} \frac{(\lambda - \lambda_i)}{\lambda_i} \in \mathcal{P}_k$$

Es gilt $p(\lambda_i) = 0$ $i = 1, .., k$ und $p(0) = 1$

Also $\max_{\lambda \in \lambda(A)} |p(\lambda)| = 0$

und damit $\| x_k - \hat{x} \|_A = 0$ $\Rightarrow$ x_k ist exakte Lsg.

b) $B \approx A^{-1}$

B spd

$x \mapsto Bx$ leicht berechenbar

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe: 3

a)

30 : y = R(1:m, :) \ q(1:m) ;

31 : x = x0 + V(:, 1:m) * y ;

b) i) Kryloväume werden über Arnoldi-Verfahren konstruiert.

ii) GMRES: y_m wird als Lsg des linearen Ausgleichsproblem

$$\min \|\beta e_1 - \tilde{H}_m y\| \qquad y \in \mathbb{C}^m$$

berechnet

FOM: y_m wird so gewählt, dass das Residuum r_m orthogonal zum Unterraum $\mathcal{K}_m$ ist.

c) In jedem Schritt vergrößert sich die Basis um einen Vektor.

- Die komplette Basis muss gespeichert werden
  $\Rightarrow$ Der Speicherplatz könnte nicht ausreichen
- Da in jedem Schritt mit der Basis gerechnet werden muss, wächst der Aufwand in jeder Iteration.
- Durch Rundungsfehler geht die Orthonormalität der Basis verloren.

Durch Restarts geht die Minimierungseigenschaft

$$\|b - Ax_m\| \leq \|b - Ax\| \qquad x \in \mathcal{K}_m$$

verloren, wobei $\mathcal{K}_m$ der Krylovraum ist, der vor dem Restart aufgespannt wurde.

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe: A4

a) Kreise für A

$D_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z+2| \leq 9 \}$

$D_2 = \{ z \in \mathbb{C} : |z+20| \leq 3 \}$

$D_3 = \{ z \in \mathbb{C} : |z+28| \leq 4 \}$

Die Kreise sind disjunkt => 1 EW pro Kreis

Matrix A ist reell => Komplexe EWe treten nur als Komplex Konjugierte Paare auf, die im selben Gershgorin Kreis Liegen, da für $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ $|\lambda_1 - r| = |\lambda_2 - r|$ gilt.

=> Es gilt $\mathrm{Im}(\lambda_k) = 0 \quad k = 1,2,3$

Kreise für A^T

$\tilde{D}_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z+2| \leq 1 \}$

$\tilde{D}_2 = \{ z \in \mathbb{C} : |z+20| \leq 5 \}$

$\tilde{D}_3 = \{ z \in \mathbb{C} : |z+28| \leq 10 \}$

Es gilt $\lambda(A) \leq \bigcup_{j=1}^{3} D_j$

Da $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \tilde{D}_3$ in der negativen Halbebene Liegen folgt $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0 \quad k = 1,2,3$

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe: ____

b) Für den Rayleigh-Quotienten gilt

$$q_A(x_k) = \lambda_1 + O(\eta^k)$$

Dabei ist

$$\eta = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$$

λ_1 betragsmäßig größter EW

λ_2 -"- zweitgrößter EW

minimale Konvergenzgeschw. $\eta \leq \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$

maximale -"- $\eta \geq \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

c) Wähle Shift $\mu \approx \lambda_j$ mit $|\mu - \lambda_j| \ll |\mu - \lambda_k|$ $k \neq j$

$\frac{1}{\mu - \lambda_k}$ sind EWe von $(\mu I - A)^{-1}$

und $\frac{1}{\mu - \lambda_j}$ ist betragsmäßig größter EW

Wende die Potenzmethode auf $(\mu I - A)^{-1}$ an

Konvergenzgeschw. $\max\limits_{k \neq j} \frac{|\mu - \lambda_k|^{-1}}{|\mu - \lambda_j|^{-1}} = \max\limits_{k \neq j} \frac{|\mu - \lambda_j|}{|\mu - \lambda_k|}$

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe: 5

a) $A_0 = A$

for $k = 0, 1, 2, \dots$

wähle Shift μ_k

Berechne $A_k - \mu_k I = Q_k R_k$

setze $A_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I$

end

b) Hessenberg-Form

- Durch Nulleinträge unterhalb der ersten Nebendiagonalen ist die QR-Zerlegung nicht so aufwändig.
- Die Hessenberg-Form bleibt im Algorithmus erhalten.

Bulge chasing / Implizites Q-Theorem

- Teure Berechnung des Shiftpolynoms $f(A_k)$ entfällt.
- Teure Berechnung der Iterierten A_{k+1} entfällt.