Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl

Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2015

Programmierblatt 1

Aufgabe 1 (Gauß–Newton–Verfahren)

Ziel dieses Programmierprojekts ist es das Beispiel zur nichtlinearen Ausgleichsrechnung aus der Vorlesung implementieren.

Ausgehend vom Foto (Abb. 1) des Vallée Blanche und Koordinaten der umliegenden Gipfel, sollen Sie herausfinden von wo das Foto aufgenommen wurde. Diese Fragestellung lässt sich als nichtlineares Ausgleichsproblem formulieren, dass Sie mit Hilfe des Gauß–Newton–Verfahrens lösen sollen.

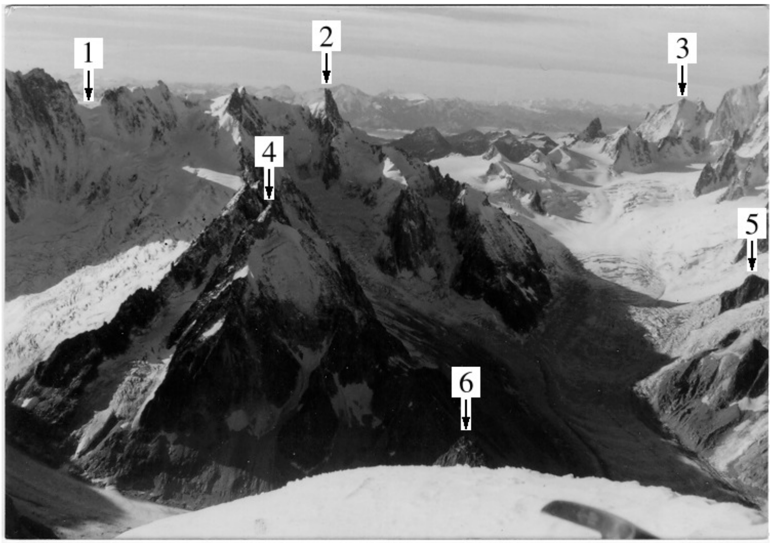

Abbildung 1: Foto des Vallée Blanche, aufgenommen von Gerhard Wanner
`http://www.unige.ch/math/folks/hairer/polycop.html`

Mathematisches Modell

Wir wählen die Koordinaten $v^k = (v_1^k, v_2^k) \in \mathbb{R}^2$ im Foto (der Ursprung liegt in der Mitte) und $x^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k) \in \mathbb{R}^3$ in der Karte (x_3 gibt die Höhe an).

Die gemessenen Werte der sechs markierten Punkte sind

k	v_1^k	v_2^k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
1. Col de Grande Jorasses	-0.0480	0.0290	9855	5680	3825
2. l'Aiguille du Géant	-0.0100	0.0305	8170	5020	4013
3. l'Aiguille Blanche de Peterey	0.0490	0.0285	2885	730	4107
4. l'Aiguille du Tacul	-0.0190	0.0115	8900	7530	3444
5. le Petit Rognon	0.0600	-0.0005	5700	7025	3008
6. l'Aiguille du Moine	0.0125	-0.0270	8980	11120	3412

Mit $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir den Brennpunkt der Linse der Kamera, mit $r \in \mathbb{R}^3$ den Vektor in Richtung des Objektes (orthogonal zur Filmebene) und mit $\theta \in [0, 2\pi]$ den Rotationswinkel der Kamera um den Vektor r, vgl. Abbildung 2. Damit sind sieben unbekannte Parameter zu identifizieren.

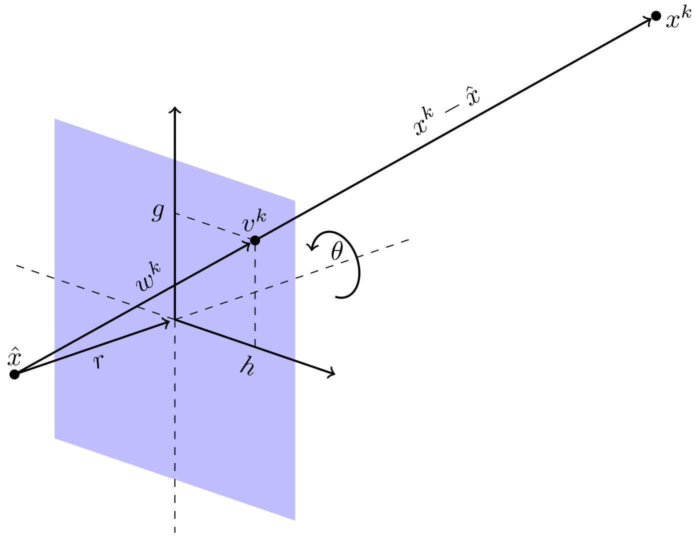

Abbildung 2: Illustration des Modells

Wir betrachten dann die Orthogonalbasis

$$r = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad h = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}} \begin{bmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2+b^2 \end{bmatrix}.$$

Die Vektoren h und g erzeugen die Filmebene, wobei h in horizontale und g in vertikale Richtung zeigt. Der Vektor, der vom Brennpunkt $\hat{x}$ der Linse auf den Punkt v^k des Films zeigt, ist durch

$$w^k = \begin{bmatrix} w_1^k \\ w_2^k \\ w_3^k \end{bmatrix} = r + \alpha^k h + \beta^k g \qquad \text{mit} \qquad \begin{bmatrix} \alpha^k \\ \beta^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^k \\ v_2^k \end{bmatrix}$$

gegeben.

Die Bedingung ist nun, dass die Vektoren w^k und $x^k - \hat{x}$ linear abhängig sind. Dies ergibt drei Bedingungen für jedes k:

$$0 = w^k \times \left(x^k - \hat{x}\right) = \begin{bmatrix} w_1^k \\ w_2^k \\ w_3^k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1^k - \hat{x}_1 \\ x_2^k - \hat{x}_2 \\ x_3^k - \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2^k(x_3^k - \hat{x}_3) - w_3^k(x_2^k - \hat{x}_2) \\ w_3^k(x_1^k - \hat{x}_1) - w_1^k(x_3^k - \hat{x}_3) \\ w_1^k(x_2^k - \hat{x}_2) - w_2^k(x_1^k - \hat{x}_1) \end{bmatrix},$$

also insgesamt 3 mal $k = 6$ gleich 18 Bedingungen für 7 Unbekannte

$$X = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ r \\ \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^7 .$$

Aufgabenstellung

Theoretischer Teil

Formulieren Sie das nichtlineare Auslgeichsproblem, bestimmen Sie alle nötigen Funktionen und überlegen Sie sich wie Sie das Gauß–Newton–Verfahren umsetzen können.

- Definieren Sie sich eine Funktion $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^{18}$ für die die Norm des Funktionswertes bei den gesuchten Daten (Standort der Kamera) minimal wird.
- Berechnen Sie die Ableitung von f.
- Formulieren Sie das Gauß-Newton-Verfahren für das Problem.

Implementierung

Lösen Sie das Beispiel zur Parameteridentifikation mit Hilfe des Gauß-Newton-Verfahrens in folgenden Schritten:

- Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `fphoto`, welche $f(X)$ berechnet.
- Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `dfphoto`, welche $f'(X)$ berechnet.
- Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

  `[X, m] = gaussnewton(f, df, X0, tol)` , $X = [X_0 \cdots X_m]$

  welche ein nichtlineares Ausgleichsproblem mit dem Gauß-Newton-Verfahren löst so, dass

  $$\|\Delta X_m\| < \text{tol}\,.$$

- Wenden Sie das Gauß-Newton-Verfahren mit den Startdaten

  $$X = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ r_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} = [8000, 15000, 1000, 0, -1, 0, 0]^T$$

  an und vergleichen Sie das Ergebnis mit den Lösungskoordinaten $\hat{x}_1 = 9664$, $\hat{x}_2 = 13115$, $\hat{x}_3 = 4116$.

- Stellen Sie die Iterierten graphisch als Punkte in der Karte dar. Laden Sie hierzu die Dateien `carte.jpg` und `plotkarte.m` von der Web-Seite zur Vorlesung herunter und speichern Sie diese in Ihrem Arbeitsverzeichnis.

  Die Funktion `plotkarte` stellt Punktepaare, die in einer $2 \times n$-Matrix mit x-Koordinaten in der ersten und die y-Koordinaten in der zweiten Zeile graphisch in der Karte dar.

Die Aufgabe kann von **Dienstag, den 5. April 2015, 14:00 Uhr** und **Mittwoch, den 6. April 2015 , 15:45 Uhr** an in den Programmiertutorien bearbeitet werden.

Homepage:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa022015s/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.