Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2015

Programmierblatt 3

Aufgabe 3 (GMRES-Verfahren)
Ziel dieser Aufgabe ist es einzusehen, dass iterative Löser für Gleichungssysteme ein wichtiges Werkzeug in der Numerik darstellen. Dazu greifen wir auf ein Problem vor, welches im Detail erst in einer Nachfolgeveranstaltung behandelt werden wird. Es handelt sich um die sogenannte Poisson-Gleichung, die durch

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in} \quad \Omega\,, \\ u &= 0 \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

gegeben ist. Um diese Gleichung numerisch zu lösen, verwendet man eine sogenannte variationelle Formulierung, welche dann durch einen Finiten-Elemente Ansatz auf ein lineares Gleichungsystem für die numerische Lösung führt.

Was das ist und wie genau das funktioniert ist Gegenstand verschiedener weiterführenden Veranstaltungen.

Für unsere Zwecke interessant ist im Moment lediglich, dass das Gleichungssystem umso größer wird, je genauer wir die Lösung ausrechnen möchten. Für zwei-dimensionale Gebiete Ω können dadurch bereits sehr schnell sehr große Gleichungssysteme entstehen, die es zu lösen gilt.

Hilfsmittel:

Laden Sie sich das Zusatzmaterial von der Webseite der Vorlesung herunter. Es enthält die Funktionen `lgsAufstellen` und `plotResult` sowie weitere Dateien, in denen verschiedene Qualitätsstufen des Gebiets Ω gespeichert sind.

- Die Funktion

  ```
  [S,fvec,B] = lgsAufstellen(l)
  ```

  liefert zu verschiedenen Qualitätsstufen `l= 1,...5` die Matrix `S` und die rechte Seite `fvec` des Gleichungssystems `S*x = fvec`, welches zur Lösung des Poisson-Problems benötigt wird. Außerdem wird die Matrix `B` geliefert, welche zur Visualisierung der Lösung benötigt wird.
  Hinweis: Für `l=1,2,3,4,5` erhalten Sie Gleichungssysteme der Dimension `681, 2872, 11778, 47686, 191886.`

- Mit Hilfe der Funktion

  ```
  plotResult(x, l, B)
  ```

  können Sie ihre berechnete Lösung grafisch darstellen. Dabei ist `x` die Lösung des Gleichungssystems, `l` die Qualitätsstufe und `B` die Matrix aus `lgsAufstellen`.

Aufgabenstellung:

(a) Verwenden Sie die MATLAB interne Funktion `lu`, um das Gleichungssystem für `l=1,2,3,4` mithilfe der LR-Zerlegung zu lösen. Plotten Sie Ihre Ergebnisse. Stoppen Sie dabei mithilfe von `tic` und `toc` die Zeit und überlegen Sie sich, was passieren würde, wenn Sie das Gleichungssystem für `l=5` auf diese Weise lösen würden.

(b) Verwenden Sie die MATLAB interne Funktion `gmres`, um das Gleichungssystem für `l=1,2,3,4` mithilfe des GMRES-Verfahrens zu lösen. Vergleichen Sie die zum Lösen benötigte Zeit mit Teil (a). Können Sie nun auch das Gleichungssystem für `l=5` lösen?

(c) Implementieren Sie nun das aus der Vorlesung bekannte GMRES-Verfahren selbst. Schreiben Sie dazu eine MATLAB-Funktion

  [x, TotIt, ResVec] = my_gmres(A, b, Tol, MaxIt, x0)

  mit welcher Sie die Lösung eines Gleichungssystems `A*x = b` approximieren können. Verwenden Sie den Arnoldi-Algorithmus mit modifiziertem Gram-Schmidt-Prozess zur Konstruktion der Krylov-Basis. Sie dürfen dann die MATLAB interne Funktion `qr` zur Berechnung der QR-Zerlegung verwenden.

(d) Die Matrix A des hier auftretenden Gleichungssystems ist symmetrisch. Visualisieren Sie die Besetzungsstruktur der Matrix A für `l=2` mithilfe des `spy`-Befehls und testen Sie, ob die Matrix symmetrisch ist. Implementieren Sie dann eine weitere MATLAB-Funktion

  [x, TotIt, ResVec] = my_gmres_sym(A, b, Tol, MaxIt, x0)

  die analog zu `my_gmres` funktioniert, aber ausnutzt, dass die Matrix `A` symmetrisch ist.

(e) Testen Sie nun ausgiebig die von Ihnen implementierten GMRES-Varianten, indem Sie:

- Für kleine `l` die Lösung mit der exakten Lösung vergleichen.
- Die Laufzeiten für verschiedene `l` vergleichen.
- Für verschiedene `l` die Residuen-Vektoren mit der Anzahl der Iterationen vergleichen.

Stellen Sie Ihre Ergebnisse in geeigneten Plots dar.

Bonusaufgabe: Modifizieren Sie Ihre GMRES-Verfahren aus (c) und (d) derart, dass Sie mit Restarts durchgeführt werden können. Testen Sie auch diese Varianten und versuchen Sie die Ergebnisse der Vorlesung zu reproduzieren.

Die Aufgabe kann von **Dienstag, den 23. Juni 2015, 14:00 Uhr** und **Mittwoch, den 24. Juni 2015 , 15:45 Uhr** an in den Programmiertutorien bearbeitet werden.

Homepage:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa022015s/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.