Aufgabe 1:

a) $f(x) = a - \frac{1}{x}$

Newton: $\psi(x_k) = 2x_k - a x_k^2$

b) Banachscher Fixpunktsatz:

- Kontraktion: $|\psi'(x)| < 1 \iff x \in (\frac{1}{2a}, \frac{3}{2a})$
- Selbstabb.: ψ symm. zu $x = \frac{1}{a}$; $\frac{1}{a}$ Hochpunkt und $\psi(\frac{1}{2a}) > \frac{1}{2a}$
- abgeschlossen: $x_0 \in [\frac{1}{2a} + \varepsilon, \frac{3}{2a} - \varepsilon]$ $\varepsilon > 0$ „klein genug"

Verfahren konv. für $x_0 = 0$ nicht, da $x = 0$ Fixpunkt von ψ.

c) wegen b) bleibt zu zeigen: Konvergenz für $x_0 \in (0, \frac{1}{2a}]$

induktiv ergibt sich $x_{k+1} \geq (\frac{3}{2})^{k+1} x_0$

$\Rightarrow \exists\ k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{k_0} \in (\frac{1}{2a}, \frac{1}{a}] \overset{b)}{\Rightarrow}$ Beh.

d) $x_0 = 0{,}1 \quad x_1 = 0{,}14 \quad x_2 = 0{,}1624$

Aufgabe 2:

$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} =: \phi(x_k) \qquad x_0 = 0$

Banachscher Fixpunktsatz:

- Kontraktion: $|\phi'(x)| < 1 \iff x \in (-\frac{7}{4}, \infty)$

  weiter: $\phi'(x) > 0 \quad \forall x > -\frac{7}{4}$
- wähle z.B. $I = [0, 4] \Rightarrow \phi(I) \subseteq I$ und ϕ Selbstabb.

$\overset{BFPS}{\Rightarrow}$ es ex. ein eindeutiger Fixpunkt $x^* \in I$.

- FP: $\phi(x^*) = x^* \iff x^* = 2$

Aufgabe 3

a) $S_1 = (-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$; $S_2 = (-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$; $S_3 = (\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$; $S_4 = (\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$

b) $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x^2 - y^2 - 1 \end{pmatrix}$

Newtonverfahren: $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_k} & \frac{1}{x_k} \\ \frac{1}{y_k} & -\frac{1}{y_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^2 + y_k^2 - 2 \\ x_k^2 - y_k^2 - 1 \end{pmatrix}$

$x_0 = y_0 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$