Aufgabe 4:

(i) $|\lambda_j| = 1 \quad \forall j$, denn $\|v\| = \|Uv\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$ für v EV zum EW λ

(ii) $\lambda_j \in \mathbb{R}$, denn $\lambda v^H v = \dots = \bar{\lambda} v^H v$

(iii) $\lambda_j \in i\mathbb{R}$, denn $\lambda v^H v = \dots = -\bar{\lambda} v^H v$

(iv) keine Aussage möglich

(v) $\lambda_i < 0$, denn $v^H N v = \dots = \underbrace{\lambda}_{<0} \underbrace{\|v\|^2}_{\geq 0} < 0$

(vi) $\lambda_i \geq 0$

(vii) keine Aussage möglich

Aufgabe 5

B sym. pos. def. $\Rightarrow$ es ex. eine Cholesky-Zerlegung: $B = LL^T$

$Ax = \lambda Bx \iff A L^{-T} \underbrace{L^T x}_{=:y} = \lambda L \underbrace{L^T x}_{=y} \iff \underbrace{L^{-1} A L^{-1}}_{=:C} y = \lambda y$

$C^T = C \Rightarrow C$ symmetrisch.

Aufgabe 6

Gerschgorinkreise für A : $B_3(4)$, $B_1(-1)$, $B_2(0)$

Gerschgorinkreise für A^T : $B_1(4)$, $B_1(-1)$, $B_4(0)$

Satz von Bendixson - Hirsch:

$A_1 = \dfrac{A + A^H}{2} \overset{\text{Gerschgorin}}{\leadsto} \sigma(A_1) = [-3, 6]$

$A_2 = \dfrac{A - A^H}{2} \overset{\text{Gerschgorin}}{\leadsto} \sigma(A_2) = [-1, 1]$

$\overset{\text{Bendixson-Hirsch}}{\Rightarrow} \quad \sigma(A) \in [-3, 6] \times [-i, i]$

Aufgabe 7:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch $\Rightarrow$ es ex. eine Orthogonale Matrix Q mit
$A = QDQ^T$ mit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$Q^T x =: y$ ($y \neq 0$, da Q regulär)

$$\frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{x^T Q D Q^T x}{x^T x} = \frac{(Q^T x)^T D (Q^T x)}{(Q^T x)^T (Q^T x)} \geq \lambda_{min} \frac{y^T y}{y^T y} = \lambda_{min}$$

Für den EV zu λ_{min} gilt Gleichheit $\Rightarrow$ Beh. $\square$

(ii) analog.