Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl

Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2015

Tutorium 3

Aufgabe 8 (Eigenwerte)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine hermetische Matrix mit den reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ und jeden Vektor $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ die Abschätzung

$$\min_{1\le j\le n} |c-\lambda_j| \le \frac{\|Ax-cx\|_2}{\|x\|_2}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass es zu jedem Diagonalelement a_{ii} der Matrix A einen Eigenwert λ der Matrix A gibt, für den die Ungleichung

$$|\lambda - a_{ii}| \le \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt.
Hinweis: Verwenden Sie Teil (a) mit geeignetem Vektor x.

(c) Verwenden Sie die Abschätzung aus (a) mit $c = 5$ und $x = [1, 1, 1]^T$, um zu zeigen, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

einen Eigenwert im Intervall $[4, 6]$ besitzt.

Aufgabe 9 (Potenzmethode)
Gegeben sei die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

(a) Begründen Sie, wieso die Matrix zirkulante Shiftmatrix genannt wird.

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von S mit den zugehörigen Eigenvektoren.

(c) Geben Sie die k-te Iterierte der Potenzmethode angewandt auf die Matrix S mit dem Startvektor $y_0 = e_1$ an. Welche Aussage kann man über die Konvergenz der Methode treffen? Wie ist dies mit den Resultaten zur Konvergenz aus der Vorlesung vereinbar?

Aufgabe 10 (Unterraumiteration)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n$ ein Untervektorraum. Seien weiter für $c \notin \sigma(A)$ die beiden Unterraumiterationen

$$\mathcal{V}_j = (A - cI)^j \mathcal{S} \quad \text{und} \quad \mathcal{W}_j = (A^H - cI)^{-j} \mathcal{S}^\perp$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) Die Iterationen $\mathcal{V}_j$ und $\mathcal{W}_j$ sind in dem Sinn äquivalent, dass $\mathcal{V}_j = \mathcal{W}_j^\perp$ für $j = 0, 1, \dots$ gilt.

(b) Sei $\mathcal{U}$ ein A-invarianter Unterraum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
  (i) Es existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{V}_j = \mathcal{U}$ für $j \ge j_0$.
  (ii) Es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{W}_k = \mathcal{U}^\perp$ für $k \ge k_0$.

Die Aufgaben können am

- **Freitag, den 29. Mai 2015, 14:00 Uhr**,
- **Dienstag, den 2. Juni 2015, 14:00 Uhr**,
- **Mittwoch, den 3. Juni 2015, 15:45 Uhr**,

in den Theorietutorien bearbeitet werden.

Homepage:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa022015s/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.