Aufgabe 8

a) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch $\Rightarrow$ es ex. $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär mit

$$U^H A U = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\|Ax - cx\|_2 = \|UDU^H x - cUU^H x\|_2 \geq \min_{1\leq j\leq n} |\lambda_j - c| \underbrace{\|U^H x\|_2}_{=\|x\|_2}$$

da $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 = \|U^H x\|_2$

b) $c = a_{ii}$ $\quad x = e_i$

$$\Rightarrow |a_{ii} - \lambda| \leq \|Ae_i - a_{ii}e_i\|_2 = \Big(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n |a_{ki}|^2\Big)^{1/2} \overset{A=A^H}{=} \Big(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n |a_{ik}|^2\Big)^{1/2}$$

c) $\min_{1\leq j\leq 3} |5 - \lambda_j| \leq 1 \quad \Rightarrow$ EW liegen in $[4, 6]$, da A nur reelle EW hat.

Aufgabe 9

a) ✓

b) char. Polynom $P_S(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - 1)$

Die EWe sind die n-ten Einheitswurzeln: $\lambda_j = \exp\left(2\pi i \frac{(j-1)}{n}\right)$ $j = 1, \dots, n$

Da S Shiftmatrix, muss für einen EV v zum EW λ gelten

$\lambda (v)_k = (Sv)_k = (v)_{k+1}$

$\uparrow$ k-ter Eintrag

Setze O.B.d.A $(v)_n = 1$ $\Rightarrow$

$$v_j = \begin{pmatrix} \exp\left(2\pi i \frac{(j-1)}{n}\right) \\ \exp\left(2\pi i \cdot 2 \frac{(j-1)}{n}\right) \\ \vdots \\ \exp\left(2\pi i \cdot (n-1) \frac{(j-1)}{n}\right) \\ \exp\left(2\pi i\, n \left(\frac{j-1}{n}\right)\right) \end{pmatrix}$$

c) Potenzmethode iteriert die Einheitsvektoren durch. $\Rightarrow$ keine Konvergenz.
Da $|\lambda_j| = 1$ und somit $\eta = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|} = 1$ ist dies kein Widerspruch

Aufgabe 10

a) Sei $x \in \mathcal{V}_j$, $y \in \mathcal{W}_j$. Dann ex. $u \in S$ und $v \in S^\perp$ mit

$x = (A - cI)^j u$ und $y = (A^H - cI)^j v$

$\Rightarrow y^H x = \dots = v^H u = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}_j = \mathcal{W}_j^\perp$

b) „$\Rightarrow$" Aus $\mathcal{V}_j = \mathcal{U}$ für $j \geq j_0$ folgt mit a) $\mathcal{W}_j = \mathcal{U}^\perp$ für $j \geq j_0$

„$\Leftarrow$" Aus $\mathcal{W}_k = \mathcal{U}^\perp$ für $k \geq k_0$ folgt mit a) $\mathcal{V}_k = \mathcal{U}$ für $k \geq k_0$

Also: $\mathcal{U} = (A - cI)\mathcal{U}$

Sei $x \in \mathcal{U}$. $\mathcal{U}$ ist Unterraum $\Rightarrow Ax = \underbrace{(A - cI)x}_{\in \mathcal{U}} + \underbrace{cx}_{\in \mathcal{U}} \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow A\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$