Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl

Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2015

Tutorium 4

Aufgabe 12 (Hessenberg Matrix)

Zeigen Sie, dass zur Berechnung der QR-Zerlegung einer oberen $n \times n$ Hessenbergmatrix nur $\mathcal{O}(n^2)$ anstatt $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen notwendig sind.

Aufgabe 13 (Implizites Q-Theorem)

Bei der effizienten Berechnung der Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ spielt das implizite Q-Theorem eine entscheidende Rolle. Ziel dieser Aufgabe ist es, sich vom praktischen Nutzen des impliziten Q-Theorems anhand eines Schrittes des QR-Algorithmus mit Shift (Algorithmus 6.6) zu überzeugen.

(a) Machen Sie sich Schritt für Schritt klar, auf welche Weise man mit Hilfe des impliziten Q-Theorems die Berechnung der QR-Zerlegung im Algorithmus umgehen kann.

(b) Begründen Sie, wieso eine Berechnung mit *bulge chasing* günstiger ist. Welche Auswirkungen haben mehrfache Shifts auf das *bulge chasing*?

Aufgabe 14 (Konvergenz QR-Algorithmus)

Führen Sie die Details des heuristischen Konvergenzbeweises des QR-Algorithmus mit Rayleigh-Shifts aus (Abschnitt nach Satz 6.33). Zeigen Sie insbesondere, dass die Gleichung

$$RQ + \mu I = \begin{bmatrix} \ddots & & & \star \\ \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \star & \star \\ & & -\frac{\gamma\epsilon^2}{\alpha^2+\epsilon^2} & \star \end{bmatrix}$$

gilt. Zeigen Sie weiter, dass im Falle $H = H^T$ die Gleichung

$$\gamma = e_2^T \tilde{Q}_{n-2} \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

erfüllt ist.

Die Aufgaben können am

- **Freitag, den 12. Juni 2015, 14:00 Uhr**,
- **Dienstag, den 16. Juni 2015, 14:00 Uhr**,
- **Mittwoch, den 17. Juni 2015, 15:45 Uhr**,

in den Theorietutorien bearbeitet werden.

Homepage:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa022015s/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.