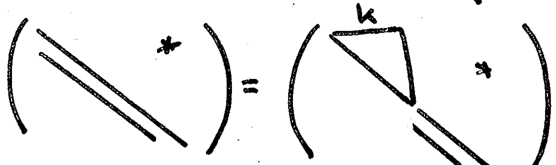
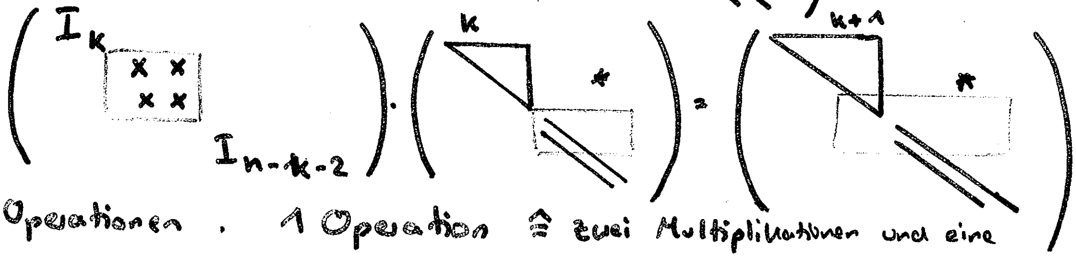
Aufgabe 12

Die Householdermatrizen haben die Form $H_k = \begin{pmatrix} I_k & & & \\ & \times & \times & \\ & \times & \times & \\ & & & I_{n-k-2} \end{pmatrix}$

Dann gilt: $H_{k-1}H_{k-2}\cdots H_0 \cdot$  $k=0,\dots,n-1$

Schritt $k \rightsquigarrow k+1$: 

Also $2(n-k)$ Operationen. 1 Operation $\hat{=}$ zwei Multiplikationen und eine Addition

Zahl der ges. Operationen: $\sum_{k=0}^{n-1} 2(n-k) = n^2 - n$

$\Rightarrow$ Gesamtzahl der Operationen: $\mathcal{O}(n^2)$

Aufgabe 13

a) QR mit Shift: $A_k - \mu_k I = Q_k R_k$

$$A_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I = Q_k^H Q_k R_k Q_k + \mu_k I$$
$$= Q_k^H A_k Q_k$$

$\Rightarrow$ Man erhält A_{k+1} durch unitäre Ähnlichkeitstransformation aus A_k.

implizites Q-Theorem: $\Rightarrow$ Konstruiere $\tilde{Q}$ mit $\tilde{Q}e_1 = Q_k e_1$ und

$\tilde{A}_{k+1} = \tilde{Q}^H A_k \tilde{Q}$ obere Hessenbergform:

da $Q_k e_1 = \alpha Q_k R_k e_1 = \alpha (A_k - \mu_k I)e_1$ und die Spalten von $\tilde{Q}$ normiert, gilt: $\tilde{Q}e_1 = \dfrac{(A_k - \mu_k I)e_1}{\|(A_k - \mu_k I)e_1\|}$

Eine Householdermatrix mit dieser Eigenschaft kann man leicht konstruieren.

bulge-chasing $\to \tilde{Q}$

b) Die teure Auswertung des Shiftpolynoms $f_k(A_k)$ wird gespart, da nur $f_k(A_k)e_1$ benötigt wird.

A_{k+1} muss nicht mit den vollbesetzten Matrizen Q_k^H und Q_k multipliziert werden, da $\tilde{A}_{k+1}$ nach der Konstruktion von $\tilde{Q}$ schon berechnet wurde.

Mehrfache Shifts sorgen für Ausbuchtungen der Größe k.

Aufgabe 14

QR-Algorithmus mit Shift: $\mu = h_{nn}$

$$H - \mu I = QR$$
$$\tilde{H} = RQ + \mu I$$

Es gilt (Skript): $H - \mu I = \begin{pmatrix} \ddots & & * \\ \ddots & \ddots & \\ & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} \diagdown & \\ & \tilde{R}_{n-1} \end{pmatrix}$, $\tilde{R}_{n-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2} & \frac{\gamma\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}} \\ 0 & -\frac{\gamma\varepsilon}{\sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}} \end{pmatrix}$, $Q_j = \begin{pmatrix} I_{j-1} & & \\ & \tilde{Q}_j & \\ & & I_{n-j-1} \end{pmatrix}$

$Q = Q_1^T \dots Q_{n-1}^T$

es gilt: $RQ = RQ_1^T \cdot \ldots \cdot Q_{n-1}^T = \hat{R} Q_{n-2}^T Q_{n-1}^T$

$$= \begin{pmatrix} \diagdown & \\ & \tilde{R}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-3} & & \\ & \begin{matrix} x & x \\ x & x \end{matrix} & \\ & & 1 \end{pmatrix} Q_{n-1}^T = \begin{pmatrix} \ddots & & * \\ \ddots & x & x \\ & 0 & \frac{-\gamma\varepsilon}{\sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}} \end{pmatrix} Q_{n-1}^T$$

mit $\tilde{Q}_{n-1}^T = \begin{pmatrix} \alpha & -\varepsilon \\ \varepsilon & \alpha \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\varepsilon^2}}$ folgt

$$RQ = \begin{pmatrix} \ddots & & * \\ \ddots & * & * \\ & \frac{-\gamma^2\varepsilon^2}{\alpha^2+\varepsilon^2} & * \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow RQ + \mu I$ hat die angegebene Form.

$\underline{H = H^T}$ $\Rightarrow$ H tridiagonal von A $H - \mu I = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \varepsilon \\ & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$

$$Q_{n-2} \cdot \ldots \cdot Q_1 (H - \mu I) = Q_{n-2} \cdot \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \varepsilon \\ & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-3} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \tilde{Q}_2 & \\ & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \\ \ddots & \boxed{\begin{matrix} x & x & 0 \\ x & x & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Betrachte:
$$\begin{pmatrix} \tilde{Q}_2 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ x & x & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & \gamma \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = e_2^T \tilde{Q}_{n-2} \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}.$$