

Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2015

Tutorium 5

Aufgabe 15 (Krylov-Räume)

Zeigen Sie die folgenden Invarianzeigenschaften von Krylov-Räumen:

- (a) Für alle $\alpha, \beta \neq 0$ gilt: $\mathcal{K}_m(\alpha A, \beta b) = \mathcal{K}_m(A, b)$. (Skalierung)
- (b) Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt: $\mathcal{K}_m(A - \alpha I, b) = \mathcal{K}_m(A, b)$. (Translation)
- (c) Für alle $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt: $\mathcal{K}_m(TAT^{-1}, Tb) = T\mathcal{K}_m(A, b)$. (Basiswechsel)

Aufgabe 16 (Krylov-Räume)

Für $n, m \in \mathbb{N}$ seien die $n \times m$ -Matrizen

$$V_m = [v_1 \cdots v_m] \quad \text{und} \quad P_m = [p_1 \cdots p_m]$$

so gegeben, dass die Spaltenvektoren $v_1 \cdots v_m$ und $p_1 \cdots p_m$ jeweils eine Basis des Krylov-Raumes $\mathcal{K}_m(A, b)$ bilden. Zeigen Sie, dass dann eine reguläre obere Dreiecksmatrix R_m mit $P_m = V_m R_m$ existiert.

Aufgabe 17 (FOM- und GMRES-Verfahren)

Geben Sie konkret den Algorithmus des FOM-Verfahrens an. Machen Sie sich dabei klar, worin genau der Unterschied zwischen dem GMRES-Verfahren und dem FOM-Verfahren besteht.

Aufgabe 18 (FOM- und GMRES-Verfahren)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften für das GMRES- und das FOM-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$:

- (a) Die Verfahren sind skalierungsinvariant, das heißt wendet man die Verfahren auf die Gleichung $\sigma Ax = \sigma b$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ an, so gilt für die Residuen \hat{r}_k der Zusammenhang $\hat{r}_k = \sigma r_k$.
- (b) Die Verfahren sind invariant unter orthogonaler Transformation, das heißt wendet man die Verfahren auf die Gleichung $QAQ^T x = Qb$ mit einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ an, so gilt für die Residuen \hat{r}_k der Zusammenhang $\hat{r}_k = Qr_k$.

Überlegen Sie sich zusätzlich welcher Zusammenhang zwischen den Iterierten in beiden Fällen besteht.

Die Aufgaben können am

- **Freitag, den 26. Juni 2015, 14:00 Uhr,**
- **Dienstag, den 30. Juni 2015, 14:00 Uhr,**
- **Mittwoch, den 1. Juli 2015, 15:45 Uhr,**

in den Theorietutorien bearbeitet werden.

Homepage:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa022015s/de> erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.