Aufgabe 15

a) $\mathcal{K}_m(\alpha A, \beta b) = \operatorname{span}\{\beta b, \alpha\beta Ab, \alpha^2\beta A^2 b, \dots, \alpha^{m-1}\beta A^{m-1} b\} = \operatorname{span}\{b, Ab, \dots, A^{m-1}b\}$
$= \mathcal{K}_m(A, b)$

b) $(A - \alpha I)^j b = (A^j + c_{j-1}A^{j-1} + \dots + c_1 A + c_0)b \in \mathcal{K}_{j+1}(A, b)$ $\quad c_0, \dots c_{j-1} \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ Beh.

c) $\underline{m=0}$: $\operatorname{span}\{Tb\} = T\operatorname{span}\{b\}$
$\underline{m \geq 1}$: Sei $1 \leq j \leq m-1$. Dann gilt $(TAT^{-1})^j Tb = TA^j b \in T\mathcal{K}_m(A, b)$

Aufgabe 16

Für $j = 1, \dots, m$ betrachte $p_j \in \mathcal{K}_j(A, b)$. Da $\{v_1, \dots, v_j\}$ Basis von $\mathcal{K}_j(A, b)$,
ex. Koeffizienten α_{ij}, sodass $p_j = \sum_{i=1}^{j} \alpha_{ij} v_i$

$\Rightarrow R_m$ rechts obere Δ-Matrix

R_m ist regulär, da $\det(P_m) = \det(V_m R_m) = \det(V_m)\det(R_m)$
Da P_m, V_m Basis $\Rightarrow \det(P_m) \neq 0$ und $\det(V_m) \neq 0 \Rightarrow R_m$ regulär.

Aufgabe 17

Der Arnoldiprozess wird wie beim GMRES-Verfahren durchgeführt.

Unterschied bei der Berechnung von y_m.

FOM: Bestimme y_m so, dass $r \perp V_m$ (G)

$\Rightarrow 0 = V_m^H r_m = V_m^H V_{m+1}(\beta e_1 - \tilde{H}_m y_m) = [I_m \; 0](\beta e_1 - \tilde{H}_m y_m)$
$= \dots = e_1\beta - H_m y_m \quad \Rightarrow \quad y_m = (H_m)^{-1} e_1 \beta$

Vor.: H_m invertierbar!

Aufgabe 18

Die Basis $V_m = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{R}^{n,m}$ zu festen $\beta v_1 = b$ ist durch $AV_m = V_{m+1}\tilde{H}_m$ eindeutig festgelegt.

a) $\hat{A} = \sigma A$, $\hat{b} = \sigma b \quad \Rightarrow \hat{\beta} = \sigma\beta$ und mit $\hat{A}V_m = V_{m+1}\hat{\tilde{H}}_m \Rightarrow \hat{\tilde{H}}_m = \sigma\tilde{H}_m$

$$\left.\begin{aligned} \text{GMRES: } & \hat{y}_m = \min_y \|\hat{\beta} e_1 - \hat{\tilde{H}}_m y\| = \dots = y_m \\ \text{FOM: } & \hat{y}_m = \hat{H}_m^{-1} e_1 \hat{\beta} = \dots = y_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{r}_m = V_{m+1}(\hat{\beta}e_1 - \hat{\tilde{H}}_m \hat{y}_m) = \sigma r_m$$

b) $\hat{A} = QAQ^T$, $\hat{b} = Qb \quad \Rightarrow \hat{b} = Qb = \beta Q v_1 = \beta\hat{v}_1$ Setze $\hat{V}_m = QV_m$
$\Rightarrow \hat{A}\hat{V}_m = \dots = \hat{V}_{m+1}\tilde{H}_m \quad \Rightarrow \beta$ und $\tilde{H}_m$ bleiben gleich, nur die Basis wird transformiert.

$$\left.\begin{aligned} \text{GMRES: } & \hat{y}_m = \min_y \|\beta e_1 - \tilde{H}_m y\| = y_m \\ \text{FOM: } & \hat{y}_m = (H_m)^{-1} e_1 \beta = y_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{r}_m = \hat{b} - \hat{A}\hat{V}_m\hat{y}_m = \dots = Q r_m$$