Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl

Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2015

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Fixpunktiteration)
Sei die Gleichung

$$2 + \frac{x}{2} + \ln(x) = 0 \tag{1}$$

gegeben. Diese Gleichung lässt sich auf verschiedene Arten in ein Fixpunktproblem umschreiben. Zwei mögliche Fixpunktiterationen sind durch

$$x_{k+1} = -2(2 + \ln(x_k))\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

$$x_{k+1} = e^{-2-\frac{x_k}{2}}\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) Gleichung (1) besitzt im Intervall $(0, \frac{1}{e})$ genau eine Lösung X^*.

(b) Iterationsverfahren (2) konvergiert für keinen Startwert $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{x^*\}$.

(c) Iterationsverfahren (3) konvergiert für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (Fixpunktiteration)
Gegeben sei die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \ln(1 + x^2 + y^2) - 1 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

und die Iterationsvorschrift

$$z_{k+1} = \Phi(z_k), \quad z_0 = (0, 0)^T\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass auf dem Intervall $I := [-1, 1] \times [-1, 1]$ die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes mit der Lipschitzkonstante $L = \frac{1}{2}$ erfüllt sind.

(b) Sei z^* der Fixpunkt von Φ in I. Wieviele Iterationsschritte sind hinreichend, um die Fehlerabschätzung

$$\|z_k - z^*\|_\infty \leq 10^{-3}$$

zu garantieren?

Aufgabe 3 (Newton-Verfahren)
Sei eine Funktion $f \in C^{p+1}(\mathbb{R})$ gegeben. Diese habe in x^* eine p-fache Nullstelle, $p \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie nun zur Bestimmung von x^* die folgende Variante des Newton-Verfahrens:

$$x_{n+1} = x_n - p \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

(a) Bestimmen Sie die lokale Konvergenzordnung des Iterationsverfahrens (4).

(b) Zeigen Sie, dass das gewöhnliche Newton-Verfahren für f zur Bestimmung von x^* nur linear konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass das Iterationsverfahren (4) mit dem gewöhnnlichen Newton-Verfahren angewandt auf die Funktion $g = f^{1/p}$ übereinstimmt.

Hinweis: f besitzt die Darstellung $f(x) = (x - x^*)^p g(x)$, mit $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(x^*) \neq 0$.

Die Aufgaben werden am **Donnerstag, den 23. April 2015, 09:45 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa022015s/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.