

Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2015

Übungsblatt 2

Aufgabe 4 (Approximation von Eigenwerten)

- (a) Seien die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Sei weiter A diagonalisierbar mit der Ähnlichkeitstransformation T . Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ definiere $F = A + \varepsilon B$. Zeigen Sie, zu jedem Eigenwert λ_ε von F gibt es einen Eigenwert λ von A mit

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda| \leq \|T^{-1}BT\|_\infty |\varepsilon|.$$

- (b) Sei die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 3.01 & 1 & -2 \\ 0.01 & 1.99 & -1 \\ -0.01 & 0.01 & 1.01 \end{pmatrix}$$

gegeben. Nutzen Sie Aufgabenteil (a), um die Eigenwerte von H zu approximieren. Verwenden Sie dazu eine geeignete Aufspaltung $H = A + \varepsilon B$. Geben Sie zusätzlich eine Schranke für den maximalen Fehler dieser Approximation an.

Aufgabe 5 (Reelle Schur-Normalform)

Beweisen Sie Satz 6.5. der Vorlesung: Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} R_{11} & * & * & * \\ 0 & R_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & R_{mm} \end{pmatrix}$$

wobei die Einträge R_{ii} entweder skalare oder 2×2 -Matrizen mit konjugiert komplexen Eigenwerten sind.

Aufgabe 6 (Approximation von Eigenwerten)

Sei $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & \varepsilon \sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon \sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1 - \varepsilon \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}.$$

Wie verhalten sich die Matrix A_ε und ihre Eigenwerte und Eigenvektoren für $\varepsilon \rightarrow 0$?

Die Aufgaben werden am **Donnerstag, den 7. Mai 2015, 09:45 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa022015s/de> erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.