Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2015

Übungsblatt 3

Aufgabe 7 (Potenzmethode)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots \lambda_n$, wobei

$$\lambda_1 = -\lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad |\lambda_j| < |\lambda_1| \quad \text{für} \quad j = 3, \dots, n\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Potenzmethode in diesem Fall nicht konvergiert.

(b) Modifizieren Sie die Potenzmethode geeignet und zeigen Sie, dass Ihre modifizierte Potenzmethode angewand auf A konvergiert.

Aufgabe 8 (Deflation)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Für das Eigenwertproblem $Av = \lambda v$ sei bereits ein Eigenwert λ_1 mit zugehörigem Eigenvektor $v_1 \in \mathbb{R}^n$ bekannt. Zeigen Sie, dass ein Vektor $c \in \mathbb{R}^{n-1}$, eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ und eine Householder-Transformation $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existieren, sodass

$$HAH = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c^T \\ 0_{n-1} & B \end{pmatrix}$$

gilt. Begründen Sie zudem, dass für die Spektren von A und B die Beziehung $\sigma(A) = \sigma(B) \cup \{\lambda_1\}$ gilt.

Aufgabe 9 (QR-Algorithmus)

(a) Zeigen Sie, dass die simultane Iteration für $m = n$ und der QR-Algorithmus äquivalent in dem Sinne sind, dass die berechneten Matrizen A_k beider Verfahren bis auf unitäre Ähnlichkeitstransformation mit Diagonalmatrizen übereinstimmen.

(b) Zeigen Sie, dass beim QR-Algorithmus ein Mehrfachshift vom Grad r äquivalent zu r Mehrfachshift vom Grad 1 ist, wobei die Äquivalenz wie in (a) zu verstehen ist.

Die Aufgaben werden am **Donnerstag, den 28. Mai 2015, 09:45 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa022015s/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.