

## Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2015

## Übungsblatt 5

### Aufgabe 12 (Krylov-Räume)

Zu einer regulären Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und einem Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  sei der  $k$ -te Krylov-Raum  $\mathcal{K}_k(A, b)$  gegeben. Sei zusätzlich  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  die Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$ . Zeigen Sie, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (1) Die Vektoren  $b, Ab, \dots, A^k b$  sind linear abhängig.
- (2) Es gilt  $\mathcal{K}_k(A, b) = \mathcal{K}_{k+1}(A, b)$ .
- (3) Es gilt  $A\mathcal{K}_k(A, b) \subset \mathcal{K}_k(A, b)$ , d.h. für alle  $y \in \mathcal{K}_k(A, b)$  gilt  $Ay \in \mathcal{K}_k(A, b)$ .
- (4) Es gilt  $\hat{x} \in \mathcal{K}_k(A, b)$ .

### Aufgabe 13 (Fehlerabschätzung)

Sei eine reguläre Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und ein Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Sei weiter  $x_m$  eine Folge von approximativen Lösungen der Gleichung  $Ax = b$ . Zeigen Sie, dass für  $\hat{x} := A^{-1}b$ ,  $f_m := \hat{x} - x_m$  und  $r_m := A(\hat{x} - x_m) = Af_m$  die Ungleichungen

$$\frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|r_m\|}{\|r_0\|} \leq \frac{\|f_m\|}{\|f_0\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r_m\|}{\|r_0\|}$$

erfüllt sind. Dabei bezeichnet  $\kappa(A)$  die Konditionszahl der Matrix  $A$ .

---

Die Aufgaben werden am **Donnerstag, den 25. Juni 2015, 09:45 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

#### Homepage:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa022015s/de> erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.