Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl

Numerische Mathematik 2

Sommersemester 2015

Übungsblatt 6

Aufgabe 14 (CG-Verfahren)
In der Vorlesung wurde behauptet, dass es für die Konvergenz des CG-Verfahrens vorteilhaft ist, wenn die Eigenwerte der symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in einigen wenigen Clustern liegen. Allgemein gilt für die k-te Iterierte $x_k \in \mathbb{R}^n$ des CG-Verfahrens mit Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Fehlerabschätzung

$$\|x_k - \widehat{x}\|_A \leq \max_{\lambda\in\sigma(A)} |p(\lambda)| \cdot \|x_0 - \widehat{x}\|_A\,, \tag{1}$$

wobei p ein beliebiges Polynom vom Grad k mit $p(0) = 1$ ist. Wir möchten diese Fehlerabschätzung nun nutzen, um zu zeigen, dass Cluster von Eigenwerten tatsächlich von Vorteil sind.

Sei $r, d > 0$ mit $r \ll d$, wir definieren $t_i = id$ für $i = 1, \dots, M$ und nehmen an, dass

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{M} (t_i - r, t_i + r)$$

gilt, d.h. die Eigenwerte von A sind in M Clustern der Breite $2r$ angeordnet.

(a) Konstruieren Sie ein Polynom p_M vom Grad M so, dass

$$p_M(t_i) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, M, \quad \text{und} \quad p(0) = 1$$

erfüllt ist und bestimmten Sie die Ableitung p_M'.

(b) Ihr Übungsleiter konnte zusammen mit einem Kollegen für $i = 1, \dots, M$ die Abschätzung

$$\max_{\xi\in[t_i-r,t_i+r]} |p_M'(\xi)| \leq \left(1 + (M-1)\frac{r}{d}\right)\frac{1}{d} \tag{2}$$

zeigen. Hier ist eventuell ist eine schärfere Abschätzung möglich.

Bestätigen Sie entweder Ungleichung (2), beweisen Sie eine schärfere Abschätzung oder springen Sie direkt zu Aufgabenteil (c).

(c) Nutzen Sie den Mittelwertsatz, um mit (1) und der Abschätzung (2) zu begründen, dass es für die Konvergenz des CG-Verfahrens von Vorteil ist, wenn es wenige Cluster mit Eigenwerten gibt, die weit auseinander liegen und einen kleinen Radius haben.

Aufgabe 15 (CG-Verfahren)
Für gegebenes x_0 und $r_0 = p_1 = b - Ax_0$ seien die Rekursionen

$$\begin{aligned} x_m &= x_{m-1} + \tau_m p_m \\ r_m &= r_{m-1} - \tau_m A p_m \\ p_{m+1} &= r_m + \mu'_{m+1} p_m \end{aligned}$$

gegeben. Laut Vorlesung realisieren diese Rekursionen das CG-Verfahren. Wir wollen nun zeigen, dass dies tatsächlich funktioniert.

Im Tutorium werden Sie dazu zeigen, dass die Iterierten r_m die Residuenvektoren zu x_m sind. Außerdem werden Sie zeigen, dass

$$\text{span}\{r_0, \dots, r_{m-1}\} = \text{span}\{p_1, \dots, p_m\} = \mathcal{K}_m(A, r_0)$$

gilt.

In dieser Aufgabe werden wir zeigen, welche Wahl für die Koeffizienten τ_m und μ'_m dazu führt, dass die Residuen orthogonal und die Suchrichtungen A-konjugiert sind. Also dass

$$r_k^H r_j = 0 \quad \text{und} \quad p_k^H A p_j = 0 \quad \text{für} \quad j \neq k \tag{3}$$

gilt.

Sei dazu $\delta_m = r_{m-1}^H r_{m-1}$ und $\delta'_m = p_m^H A p_m$. Zeigen Sie, dass für die Wahl

$$\tau_m = \frac{\delta_m}{\delta'_m} \quad \text{und} \quad \mu'_m = \frac{\delta_{m+1}}{\delta_m}$$

die Bedingungen (3) erfüllt sind.

Die Aufgaben werden am **Donnerstag, den 9. Juli 2015, 09:45 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa022015s/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.